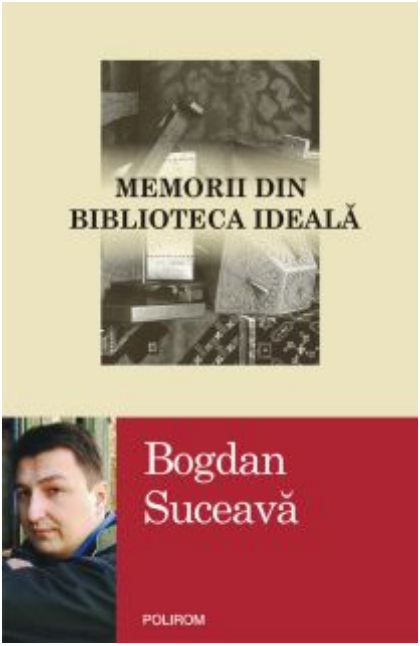

MEMORII DIN
BIBLIOTECA IDEALĂ
Bogdan
Suceavă
POLIROM

BOGDAN SUCEAVĂ

Memorii din biblioteca ideală

EDITURA POLIROM
2013

© 2013 by Editura Polirom

www.polirom.ro
Editura POLIROM
Iaşi, B-dul Carol I nr. 4; P.O. BOX 266, 700506
Bucureşti, Splaiul Unirii nr. 6, bl. B3A, sc. 1, et. 1;
sector 4, 040031, O.P. 53, C.P. 15-728

ISBN ePub: 978-973-46-3649-5
ISBN PDF: 978-973-46-3650-1
ISBN print: 978-973-46-3442-2

Coperta: Laurențiu Midvichi
Pe copertă: Hans Holbein cel Tânăr (1498-1543),
Ambasadorii (1533, detaliu)

Această carte în format digital (e-book) este protejată prin copyright şi este destinată exclusiv utilizării ei în scop privat pe dispozitivul de citire pe care a fost descărcată. Orice altă utilizare, incluzând împrumutul sau schimbul, reproducerea integrală sau parțială, multiplicarea, închirierea, punerea la dispoziția publică, inclusiv prin internet sau prin rețele de calculatoare, stocarea permanentă sau temporară pe dispozitive sau sisteme cu posibilitatea recuperării informației, altele decât cele pe care a fost descărcată, revânzarea sau comercializarea sub orice formă, precum şi alte fapte similare săvârşite fără permisiunea scrisă a deținătorului copyrightului reprezintă o încălcare a legislației cu privire la protecția proprietății intelectuale şi se pedepsesc penal şi/sau civil în conformitate cu legile în vigoare.

Lectura digitală protejează mediul

Versiune digitală realizată în colaborare cu elefant.ro

BOGDAN SUCEAVĂ – născut la 27 septembrie 1969, la Curtea de Argeş. Studii la Universitatea Bucureşti, unde a obținut licența în matematică (1994) şi diploma de studii aprofundate în geometrie (1995). Doctorat în matematică la Michigan State University, East Lansing (2002), cu teza intitulată *Noi invarianți de curbură riemannieni şi kaehlerieni şi subvarietăți puternic minimale*, realizată sub îndrumarea lui Bang-Yen Chen. În prezent, profesor la California State University, Fullerton, unde predă, între altele, cursuri de geometrie diferențială, fundamentele geometriei şi topologie. Autor de articole de matematică şi de istorie a matematicii. Membru al Pen Club West USA din 2005. Distincții literare: Premiul I Nemira, secțiunea Purgatoriu, nuvele, 1993, pentru nuvela *Imperiul generalilor târzii*; Premiul CopyRo, 2002, pentru volumul *Imperiul generalilor târzii şi alte istorii*; Premiul pentru

proză al Asociației Scriitorilor din Bucureşti pe 2007 pentru romanul *Miruna, o poveste*; Premiul I al Rețelei literare pe 2010 pentru *Noaptea când cineva a murit pentru tine*. Volume de proză şi eseuri: *Teama de amurg* (Topaz, 1990), *Sub semnul Orionului*, roman (Artprint, 1992), *Imperiul generalilor târzii şi alte istorii*, nuvele (Dacia, 2002; ed. a II-a, LiterNet, 2003), *Bunicul s-a întors la franceză, istorii* (Editura T, Fundația Timpul, 2003; ed. a II-a, LiterNet, 2008), *Venea din timpul diez*, roman (Polirom, 2004; ed. a II-a, 2010), *Miruna, o poveste* (Curtea Veche Publishing, 2007), *Distanțe, demoni, aventuri* (Tritonic, 2007), *Vincent nemuritorul*, roman (Curtea Veche Publishing, 2008), *Noaptea când cineva a murit pentru tine*, roman (Polirom, 2010).

Prolog

Dacă visul matematicienilor pursânge e să demonstreze teoreme care să le poarte numele, visul meu a fost să înțeleg până la ultima consecință nu doar anumite idei matematice, ci şi de unde provin aceste idei, filiația lor istorică, evoluția lor în timp. Iubesc cercetarea matematică, şi mi se întâmplă să fiu captivat în întregime de ea pentru perioade îndelungate. Mi se întâmplă să devin dependent de bucuria de a descoperi ceva nou. Dar

asta nu înseamnă că bucuria întâlnirilor din bibliotecă s-a diminuat vreodată. Înțeleg că astfel de întâlniri pot fi prilejuite în egală măsură de literatură, de fizică, de chimie sau de biologie. Descrierea acestor bucurii e miza paginilor care urmează.

Chiar şi atunci când vorbesc despre un domeniu în aparență atât de puțin personal precum geometria, descriu experiențe personale. În paginile acestea va fi vorba despre întâlnirea cu idei matematice sau cu lucrări ale unor autori care s-au stins demult. Alteori va fi vorba despre întâlniri directe, din viața reală, întâlniri prilejuite de matematică. Nu cred că întâlnirile acestea au fost întâmplătoare, ci că ele au fost justificate de idei matematice care au servit ca puncte de interes comun.

Probabil există unele conexiuni între ceea ce am învățat studiind matematica şi literatura pe care am scris-o. Probabil povestind despre aceste puncte de contact şi despre interesul meu pentru anumite teme am să fiu mai aproape ca oricând de ocazia de a descrie cultura în care m-am format şi care mi-a dat şansa unei formații duale. Astfel, includerea în acest volum a eseului din final, care este un text pur literar, e justificată tocmai de această dualitate.

Am ales să devin matematician la 13 ani, pe vremea când ştiam foarte puțin despre cultura cercetării matematice, şi de atunci nu mi-am schimbat opțiunea profesională. Indiferent cât de dificile au fost încercările care au urmat, nu mi-am regretat niciodată alegerea. Pentru mine, întâlnirea cu matematica a fost o experiență structural diferită de cea a altor matematicieni. E posibil ca diferența să fi fost făcută de contextul cultural (iar nu cel politic) al unei asemenea alegeri personale în România anilor optzeci, în condițiile societății şi ale valorilor de atunci. Poate îndelungata coabitare cu gândirea de tip literar a făcut ca opțiunea de a face matematică să devină, în timp, şi o experiență literară, demnă de a fi povestită. E vorba despre o perspectivă literară aflată pe acelaşi plan cu experiența personală a celui care se întâmplă să fie martor al unui eveniment important. Dacă eşti martor, e firesc să povesteşti ceea ce ai văzut şi e firesc să-ți pui problema convertirii textului într-un fel de istorie. În paginile acestea, subiectul e întâlnirea cu matematica, iar rezultatul final e filtrat printr-o asumată experiență literară, aşa cum ai istorisi despre scrierea unui roman (pentru că întotdeauna există şi o poveste aflată în spatele unei cărți).

În 2011, revista *Discobolul* şi-a propus realizarea unui număr (care până la urmă a avut dimensiunile unui întreg volum) care să includă un grupaj de texte dedicate raportului dintre matematică şi literatură. Invitația de a scrie un text pentru acel grupaj, care mi-a fost adresată de Adriana Teodorescu, a fost pentru mine cea mai plăcută surpriză care mi-a sosit vreodată din spațiul publicațiilor literare româneşti. Nu m-am aşteptat niciodată la asta. Natura temei mi-a îngăduit o abordare personală: interacțiunea dintre matematică şi literatură m-a învățat să văd, dar am încercat să păstrez separat interesul meu pentru matematică de temele pe care le-am abordat în literatură. Invitația venită din partea unei reviste literare m-a făcut să aflu că există interes şi curiozitate pentru acest subiect. Cel puțin în cultura română, unde mulți matematicieni s-au exprimat şi literar şi unde literații au fost suficient de inteligenți ca să urmărească discuțiile importante care vin din spațiul ştiințelor exacte.

Nu în ultimul rând, datorez mulțumiri revistelor *Observator cultural*, *Timpul*, *Argeş*, *Familia*, *Historia mathematica* (a casei editoriale Elsevier) şi *Memoriilor ştiințifice ale Academiei Române*, unde au apărut unele prime versiuni ale acestor texte (sau fragmente din ele). Ultimul eseu din acest volum a fost selectat de Norman

Manea în antologia *Romanian Writers on Writing*, apărută la Trinity University Press. Am revăzut toate textele incluse în acest volum, pentru a asigura o prezentare unitară a acestor materiale. În unele dintre texte am operat schimbări importante, care fac ca primele lor versiuni să fie mult diferite de forma pe care o îmbracă acum. Unele capitole apar aici pentru prima oară.

Versiunea întregită a realității

Am înțeles teorema lui Thales mai târziu decât unii dintre colegii mei de clasă. În anul acela, în clasa a VII-a, am răspuns provocării matematice mai târziu decât alții. Pe vremea aceea citeam romanele lui Karl May şi-mi păsa mai mult de desene animate decât de configurațiile geometrice. Apoi, deodată, o transformare s-a petrecut, în primăvara din clasa a VII-a. A fost o aprofundare de natură calitativă, o diferență clarificatoare, un fel de deschidere a ochilor. Am putut face operații algebrice complicate şi am început să pot decodifica probleme de geometrie. Atunci a venit prima diplomă de la olimpiadele de matematică, la nivel național. Şi lecturile mele literare s-au schimbat sensibil. Copilăria rămânea în urmă. Învățam pe atunci într-o şcoală din Târgovişte, într-o clădire cu arhitectură de secol al XIX-lea, foarte diferită în alcătuirea ei de şcolile celelalte, care arătau ca nişte

paralelipipede. În anul acela am început să citesc romane cu o convenție literară realistă, romane al căror raport cu realitatea era mai direct decât în volumele pe care le parcursesem mai înainte; în următorii doi ani aveam să citesc volume aparținând literaturii franceze din veacul al XIX-lea, precum şi romane ale unor autori pe care îi simțeam foarte aproape, ca Panait Istrati, Zaharia Stancu sau Marin Preda. Încă de atunci, ghidat de un profesor care se pricepea foarte bine la zidirea unei culturi matematice elementare, am înțeles că una dintre cele mai importante cărți pentru şcoală produse vreodată în cultura română a fost culegerea de probleme de geometrie a lui Gheorghe Țițeica (nu, nu e nici o exagerare în afirmația aceasta). Interacțiunea mea cu matematica lui Gheorghe Țițeica continuă şi azi, pe un alt plan, cu alte teme, pentru că între timp am lucrat vreme de două decenii geometrie diferențială. Dar primul contact cu şcoala de geometrie de la Bucureşti s-a produs atunci, grație culegerii de geometrie elementară pe care am început s-o lucrez într-un oraş de provincie. Pentru mine, evoluția interesului pentru matematică şi a celui pentru literatură avea loc în paralel, într-o relativă interdependență. Simțeam că sunt două forme de a mă exprima profund diferite, dar nu aş fi putut niciodată să le separ. S-a întâmplat foarte devreme:

aveam nevoie de amândouă. Perioade de profundă concentrare pe seturi de probleme sau pe lectura articolelor publicate lunar în *Gazeta matematică*, pe care la 15 ani ajunsesem să o citesc cu fidelitate, alternau cu perioade când citeam literatură aproape continuu. Acesta e şi ritmul pe care-l am acum. Cred că cel mai frumos lucru care mi s-a întâmplat crescând în cultura română a fost această dualitate.

Verile citeam cel mai mult, în săptămânile de relativă izolare pe care le petreceam într-un sat din munții Făgăraş. În vara dintre clasele a IX-a şi a X-a, înainte de a merge la Tabăra de vară a *Gazetei matematice*, care se desfăşura pe atunci în luna august la Curtea de Argeş, am citit *Triunghiul, ringul cu trei colțuri*, de Viorel Gh. Vodă. Am continuat să lucrez din culegerea lui Țițeica: vara aceea am trudit (şi verbul acesta e cel mai exact!) pe capitolul de probleme de loc geometric. Atunci mi s-a întâmplat să observ că volumul al II-lea din *Moromeții* nu e la fel de plăcut la lectură ca volumul I. În săptămânile acelea am citit şi *Hronicul şi cântecul vârstelor* al lui Lucian Blaga. Către toamnă aveau să urmeze paginile de memorialistică ale lui Ion Minulescu sau George Topârceanu. Avansam în geometrie pe măsură ce ajunsesem să citesc şi autori care însemnau ceva în

câmpul literaturii române. Nu înțelegeam poezia lui Ion Barbu, iar despre matematica lui nu ştiam nimic.

În toamnă am descoperit proza lui Balzac, cam în aceeaşi perioadă în care am învățat cu adevărat cum se aplică trigonometria la geometria triunghiului. De fapt, în clasa a X-a cred că am avut un oarecare avantaj în materie de trigonometrie față de alți concurenți la olimpiade. Ritmul lecturilor mele s-a încetinit întru câtva, pentru a se relua după examenul de treapta a doua tot mai spornic, de data aceasta la un cu totul alt nivel. Începusem să citesc literatură universală. Autorii care m-au atras atunci, la şaptesprezece ani, au fost Franz Kafka, Mario Vargas Llosa, John Fowles, F. Scott Fitzgerald, J.D. Salinger, între mulți alții. Nu mi-aş putea aminti de prima lectură din fiecare dintre aceşti autori fără a-mi aminti ce fel de matematică studiam pe atunci. Ştiu de pildă că atunci când am scris primul articol care mi-a apărut în *Gazeta matematică* (aveam 17 ani; articolul s-a numit „Observații asupra grupului de permutări" şi a apărut în nr. 11-12 din 1987) tocmai terminam de citit *America* lui Kafka. Nu-mi amintesc nimic din orele de fizică sau chimie şi nu cred că m-au interesat alte materii decât cel mult sporadic şi anecdotic (istoria m-a interesat, însă la Târgovişte nu am avut la istorie profesori buni), dar ceea

ce se petrecea în literatură sau ce se alegea de anumite soluții în matematică ajunsese să mă intereseze într-un mod foarte personal. Mă consideram un rezolvator de probleme, înainte de orice altceva. Îmi apărea evident încă de atunci că expresia cea mai clară a inteligenței ar trebui să fie identificarea unei soluții precise, optime, fie că e vorba de literatură sau de matematică. Credeam că literatura poate deveni importantă şi esențială dacă arta de a spune o poveste, de a specula configurația particulară a unui moment şi a unei interacțiuni a unor personaje ajunge să fie la fel de relevantă ca şi o generalizare care ne adânceşte capacitatea de a înțelege un fenomen matematic. Ştiam că uneori putem rata, după cum la unele probleme nu putem găsi soluția. E adevărat că cele mai multe dintre lecturile mele literare proveneau din perioada istorică a modernismului european sau erau lecturi recente ale unor autori care au integrat până la o rafinată simbioză teme ale modernismului. Dar pe atunci nu ştiam asta, pentru că nu priveam lucrurile în ordinea lor istorică. Acum ştiu că exista o rezonanță secretă între lecturile literare care mă atrăgeau atunci şi un anumit stil de a face matematică ce mă fascina. Nu am avut, de pildă, în adolescență, o prea mare atracție față de maşinăria infernală a analizei matematice, dar mai târziu aveam să

găsesc fascinantă austeritatea de deşert polar a topologiei, care este născută din necesitățile teoretice ale analizei matematice. Nu cred că există un produs intelectual care să poarte o mai pronunțată pecete a transformării moderniste a matematicii decât topologia. Iar întâlnirea mea cu acest domeniu al matematicii s-a petrecut în mai multe etape: am parcurs prima introducere a unor concepte fundamentale ale topologiei la 17 ani, sub îndrumarea profesorului Ilie Bârză (cu care în clasa a XI-a m-am pregătit în particular, înainte ca el să părăsească România, şi care nu a ezitat să-mi prezinte atunci, în liceu, elemente de teoria grupurilor şi de topologie), apoi am studiat elemente de topologie în cadrul unor cursuri de analiză matematică la Universitatea din Bucureşti, pentru ca elemente mai avansate de topologie algebrică să devină subiectul central al unor cursuri de specialitate pe care le-am urmat la Michigan State University, după 1996, când trecusem de 26 de ani.

De fapt, există un avantaj în a face din matematică o profesiune. Matematicienii au luxul de a fi mereu expuşi unor idei şi concepte noi. S-ar plictisi de moarte dacă ar face mereu unul şi acelaşi lucru, dacă ar trebui să revină asupra unei singure idei, pe care ar trebui s-o reitereze fără a-i adăuga un plus de conținut. E inevitabil: dacă

treci prin matematică decenii în şir, de la vârsta olimpiadelor din perioada gimnazială până în facultate, de la anii de doctorat (care au însemnat pentru mine cursuri urmate la zi, cu teme şi examene) până la anii de maturitate, în care ajungi să scrii lucrări de cercetare sau să construieşti singur un curs, e imposibil ca această experiență să nu treacă în tine. Poți face eforturi să o disimulezi, să o separi de tematica literaturii, dar ea rămâne la nivel structural, în zona jocului secund unde nimic anecdotic nu e îngăduit să răsară la suprafață. Matematica, în fond, e un exercițiu al esențializării, o artă a preciziei, a retragerii spre principiile ultime ale materiei. Am auzit afirmații similare făcute de filozofi, al căror domeniu s-ar dori a fi cel mai general dintre toate. Se poate. Aş fi pregătit să accept aşa ceva şi din partea filozofiei. Dar rămân la părerea că obiectele matematice *există* şi că în asta rezidă toată tăria matematicii şi a educației prin matematică.

O întrebare se impune: ce ar putea fi literatura, dacă ea îşi propune să fie întregirea umanistă a matematicii? Cum anume ar trebui scrisă literatura de azi, atunci când toate eşafodajele ideologice şi iluziile s-au dărâmat, când geografia a fost înțeleasă, dar nu deținem încă secretul întregii structuri a universului? Poate literatura să

producă un act paralel de esențializare, ca şi cum o poveste bine spusă ar fi echivalentul unei teoreme de topologie? Astfel de gânduri mi-au reținut atenția atunci când am început să studiez matematică la Universitatea din Bucureşti.

Fireşte, analogii între matematică şi literatură pot exista, dar nu interesează deloc similitudinile de suprafață, ci paşii profunzi, disecția prin calitatea materiei sau prin natura realității. O asemenea literatură ar trebui să se fixeze şi să captureze în soluții optime din punct de vedere narativ momentele-cheie ale unei realități (ale culturii române sau ale oricărei alte culturi în care autorul ar dori să lucreze), la fel cum Stefan Zweig şi-a propus să ilustreze momentele astrale ale omenirii.

Dintr-o astfel de literatură se poate învăța, pentru că ea atinge momente de adâncime. Este instructivă şi poate fi şi amuzantă, poate fi şi atractivă. Pe de altă parte, nu se poate clădi aşa ceva pe rețete. Apar şi dezavantaje de marketing: cu cât este mai inteligentă observația, cu atât mai restrâns poate fi accesul publicului larg. În fond, teoremele profunde nu sunt pentru toată lumea. Ne atrage profunzimea lor, dar e clar că nu sunt destinate unui public larg. E adevărat că, dacă mergi până la capăt, e foarte posibil ca nimeni să nu aibă capacitatea de a

cuprinde întregul, nici de a aprecia diametrul cuprinderii. Nu e o afirmație orgolioasă, ci una cât se poate de exactă.

De fapt, cred că viziunea noastră nu e întreagă dacă se concentrează numai asupra literaturii sau dacă frecventează numai una dintre ştiinţele exacte. Un drum întreg ar trebui să treacă prin profunzimi din ambele teritorii. Azi, nimeni nu mai poate încerca să cuprindă un întreg domeniu de dimensiunile matematicii contemporane într-o viziune culturală de anvergura celei pe care Leonhard Euler a avut-o în timpul său. Dar ceea ce se poate e un alt fel de cuprindere: o dezvoltare bivalentă a înțelegerii. Nu există şcoală pentru aşa ceva, deci o parte a drumului nu se poate face decât în solitudine. Privite din afară, cele mai importante momente de reflecție pot apărea drept tăceri sau întârzieri. Eforturile cele mai reuşite vor fi şi cel mai dificil de comunicat. Ceea ce ar fi putut apărea drept performanță intelectuală în perioada de glorie a modernității, de acum un veac, poate apărea drept excentricitate astăzi. Şi nu e acesta singurul risc.

Nu aş fi putut discuta relația dintre matematică şi literatură fără a încerca să descriu procesul de elaborare a unei asemenea dezvoltări: am făcut matematică vreme de două decenii, răstimp în care am scris câteva romane, câteva nuvele, câteva serii de poeme. Care e finalitatea

acestui drum? Unde am ajuns acum? Ce am aflat la capătul acestui drum? Dacă are vreun sens, aici ar trebui să-l consemnez. Iar cititorul ar trebui să aibă îngăduință dacă discuția ar atinge accente tehnice.

Am un răspuns foarte personal la această întrebare importantă, despre finalitatea acestei dezvoltări personale. Pot spune acum ce mi-a plăcut cel mai mult în matematică. Şi pot s-o fac într-o manieră care de obicei se aplică literaturii. Pentru a da un exemplu, ar trebui să menționez aici care au fost lucrările de geometrie diferențială (aceasta este specialitatea mea în domeniul matematicii) cele mai frumoase, şi pot explica în ce constă această frumusețe. Aş putea spune ce m-a atras, ce mi-a plăcut, şi ar trebui să încerc să identific principiul acestei opțiuni personale. Pentru a da răspunsul la această întrebare ar fi suficient să amintesc aici o listă de lucrări de matematică importante, esențiale şi frumoase şi ar trebui să spun în ce anume rezidă calitatea lor. E vorba, astfel, de o listă de lecturi esențiale, o listă care reflectă opțiunile mele personale.

Un asemenea răspuns nu poate fi uşor, dacă reprezintă finalitatea unei evoluții personale; mai precis, aceste lucrări trebuie să fi fost citite nu pentru că au fost sugerate de şcoală, ci pentru că am ajuns la ele în mod

necesar, urmând un studiu care a marcat o dezvoltare personală. Privite astfel, aceste lucrări sunt drumul meu, expresia unei experienţe profund asimilate, la fel cum lecturile din Franz Kafka m-au influenţat aşa de mult în adolescenţă. Atunci când predau studenţilor mei un curs de geometrie diferenţială, tot ceea ce le spun încorporează această viziune.

Ne vom limita în acest prim eseu doar la lucrările scrise după anul 1900 (tentaţia de a include şi lucrările mai vechi e mare, dar lor le rezervăm un loc aparte în capitolele următoare).

Întâi de toate, ar trebui să amintesc aici cele trei lucrări ale lui Gh. Ţiţeica prin care acesta a descoperit legătura dintre conceptul de curbură şi acţiunile grupului de transformări afin. Despre lucrările acelea, Dan Barbilian are o vorbă: „norocoasă intuiţie". Îmi plac acele lucrări pentru că sunt expresia supremă a inteligenţei pure, acel maxim cultural pe care cineva care trudeşte în România poate spera să-l atingă. Pentru acea norocoasă intuiţie a stat Ţiţeica de atâtea ori în prezidiul secţiunilor de geometrie la Congresele Internaţionale de Matematică din epocă.

Apoi, a doua consemnare în ordinea istorică a lucrurilor ar trebui să fie lucrarea lui Mukhopadhyaya din

1909, *New Methods in the Geometry of Plane Arcs*, publicată în *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, acolo unde abordarea modernă asupra inegalității izoperimetrice este formulată pentru prima oară. O întreagă direcție de cercetare s-a născut atunci, în zorii veacului, într-o revistă dintr-un colț al Imperiului Britanic. Am înțeles importanța acestei lucrări abia în primăvara lui 1999, când urmam cu Jon Wolfson la Michigan State University un curs superb de teoria geometrică a măsurii. Zece ani mai târziu, n-am rezistat şi am prezentat studenților mei la curs lucrarea originală.

Mai departe, ar trebui să amintesc aici eforturile lui Wilhelm Blaschke, cel care a dat formularea teoremei Gauss-Bonnet pe care o folosim azi. Superbă e lucrarea lui Dan Barbilian din 1934, în care a enunțat procedura de generare a metricii apolloniene. Superbă e lucrarea lui Sumner Byron Myers din 1940, în care stabileşte legătura dintre curbură şi topologie folosind calculul variațional, prima legătură de acest fel descoperită vreodată. Frumoasă e lucrarea lui T.J. Willmore în care acesta enunță conjectura care azi îi poartă numele[1]. (Apropo:

[1] Pe 27 februarie 2012 Fernando Codá Marques şi André Neves au anunțat demonstrarea conjecturii lui Willmore. Lucrarea lor a fost publicată aici: http://arxiv.org/abs/1202.6036.

aceasta este probabil una dintre cele mai importante lucrări publicate vreodată de o revistă românească. E vorba de lucrarea din 1965 intitulată *Note on Embedded Surfaces*, în Analele Ştiinţifice ale Universităţii „Al.I. Cuza" Iaşi, Secţ. I a Mat. [N.S.] 11B: 493-496. Lucrarea e citată masiv pe plan mondial.) Multe lucrări frumoase a lăsat Shiing-Shen Chern, dar cea care a plăcut cel mai mult studenţilor mei e o lucrare elementară despre proprietăţile globale ale teoriei curbelor, în care autorul reuneşte cele mai frumoase demonstraţii ale rezultatelor fundamentale ale teoriei. Lista ar putea să continue, dar mă opresc aici, la doar aceste câteva lucrări clasice; fiecare dintre ele îmi place la fel de mult cât îmi plac paginile din *Veacul de singurătate* al lui Gabriel García Márquez.

Nu am amintit aici numai lucrări de profundă contribuţie în cercetare (aşa cum sunt lucrările lui Ţiţeica şi Myers), ci şi contribuţii de sinteză sau abordări elementare asupra unor teme clasice. De ce o asemenea opţiune? Pentru că ele ilustrează cel mai bine ceea ce îmi place. O astfel de viziune se extinde şi asupra literaturii.

Cu lista lucrărilor de mai sus în minte, să vedem mai departe. Să tragem linie şi să însumăm: ce ne atrage aşa de mult la toate aceste lucrări? Ce înseamnă utilitate şi ce înseamnă frumuseţe? Când anume geometria încetează să

mai fie terenul speculației particulare şi devine mai mult decât ştiință profundă, mai precis: când devine model etic? Atunci când inteligența umană poate decripta un cod, poate trece dincolo de observația isteață, altfel accesibilă oricui capabil a scrie un aforism percutant sau un vers inspirat, şi poate pune în evidență obiecte, spații, concepte, care nu mai fuseseră ghicite până atunci şi a căror importanță poate să se reveleze deplin numai în anii ce vor urma. Frecventată astfel, geometria e arta deschiderii ochilor. Până ieri puteai privi, dar nu puteai vedea. Experiența geometriei, dusă până la capăt, te învață că o operațiune inteligentă de analizare a unui fenomen te conduce la distincții esențiale, dincolo de dificultatea tehnică, care e doar un stagiu preliminar al încriptării. Înveți pe calea cea grea că orbirea noastră se datorează opreliştilor tehnice. Ne oprim pentru că nu putem calcula, când de fapt miza era descoperirea acelei categorii care se află la capătul calculului. Să ducem munca până la capăt, să depăşim dificultatea, iar atunci când nu avem unealta necesară, aşa cum nu a avut-o nici Myers şi a trebuit să o inventeze, să ne recunoaştem datoria de a dezvolta instrumentarul necesar până când el se perfecționează suficient de mult ca să dea un răspuns

precis căutării noastre. Aceasta este concluzia eticÄƒ a cÄƒrei extensie asupra literaturii se poate imagina.

Cărți privite dinlăuntru

Există momente irepetabile în viața fiecăruia dintre noi, momente a căror subtilă importanță nu o recunoaştem atunci când, prinşi în mijlocul evenimentelor, ni se pare că aşa va fi întotdeauna. Pentru a da un exemplu din lumea teatrului, ne face plăcere să ne amintim de câte o montare dramatică izbutită, în care roluri memorabile şi o viziune regizorală originală ne poartă spre un moment plin de profunzime şi emoție. Îmi amintesc, de pildă, de o superbă montare a dramatizării după *Numele trandafirului*, cu Radu Beligan în rolul principal, pe care am urmărit-o într-un *preview* pe scena Naționalului bucureştean. Sau, tot aşa, de o extraordinară interpretare a lui Radu Beligan în *Contrabasul* lui Patrick Süskind. De câte ori merg la teatru, mi-aş dori să retrăiesc momente intense ca acelea când, spectator, am fost profund emoționat de o reuşită montare teatrală. Mi se pare că asemenea momente reuşite vor mai fi posibile, mă amăgesc că emoțiile spectacolelor de altădată ar putea fi retrăite.

Dar, de fapt, e posibil?

Ceva similar se întâmplă şi cu evenimentele remarcabile la care suntem martori. Voi povesti aici despre două cărți pe care le-am văzut scrise. Nu voi vorbi despre cărțile mele, pentru că nimic din ceea ce am încercat eu nu se apropie de importanța volumelor la care mă voi referi. Voi povesti despre două cărți de matematică a căror laborioasă naştere s-a întâmplat să aibă loc sub ochii mei. Creşterea acelor cărți, deşi nu au fost ale mele, mi-a determinat opțiunile şi m-a făcut la rândul meu să studiez anumite teme.

Bucureşti

L-am cunoscut pe regretatul profesor Stere Ianuş în primăvara lui 1988, înainte să dau admitere la facultate. Eram în clasa a XII-a şi nu făcusem până atunci nici un fel de meditații la geometrie. Făcusem pregătire în particular la alte materii, dar nu la geometrie, pe care nicidecum nu o neglijasem, dar pentru care nu urmasem meditații specializate. M-am întâlnit de puține ori cu el, probabil nu mai mult de trei ori, şi de fiecare dată şedința a decurs la fel: mi-a dat probleme pe care eu le-am rezolvat. A fost un dialog pe care şi azi mi-l amintesc cu plăcere. După ce m-a urmărit pe parcursul acelor întâlniri, m-a asigurat că n-ar trebui să mă îngrijorez, că nu voi avea probleme la admiterea la facultate. După anul de

armată, în care n-am făcut prea multă matematică, am devenit student în septembrie 1989, dar cursul de geometrie de anul I nu l-am urmat cu dl Stere Ianuş, ci cu dna Adriana Turtoi. Ne-am revăzut într-un moment plin de tensiune, în dimineața de 23 decembrie 1989, în amfiteatrul Stoilow, de la Facultatea de Matematică, acolo unde decanul de atunci, profesorul de algebră Nicolae Radu[2], încerca să administreze cu maximul de diplomație de care domnia sa ar fi putut face uz în prima zi de după căderea de la putere a partidului comunist. Profesorul Ianuş se afla acolo, alături de decan, şi ştiam cât de sincer se bucura de turnura politică a evenimentelor. Cu un an înainte aflase că nu mai putea călători în străinătate: vorbise prea mult la telefon cu Italia. Conversațiile telefonice îi fuseseră monitorizate. Probabil că mai bine de 90% din conținutul acelor conversații fusese pur şi simplu matematică, dar au fost dialoguri desfăşurate în italiană, pe care profesorul Ianuş o vorbea excelent. Să fi fost calitatea profesională şi abilitatea de vorbitor de italiană păcate înainte de 1989? Sigur că da, şi în afară de asta, matematicienii au o lungă tradiție în a fi suspecți. (Să amintim aici cum Sophus Lie, care era norvegian, a fost

[2] Pentru informația de natură istorică, ar trebui adăugat că Nicolae Radu a fost coautor cu Dan Barbilian al unui articol apărut în 1962.

arestat din eroare şi era să fie executat ca spion de către francezi atunci când a izbucnit războiul franco-prusac, pentru că avea în bagaj caiete pline cu simboluri misterioase, într-o limbă care aducea a germană?) Omul acela mărunt la stat, cu ochi vii, atât de plin de energie, care păstra în camera lui din apartamentul de pe Calea Moşilor colecția integrală din *Journal of Differential Geometry*, de la înființare şi până la ultimul număr, putea fi oare văzut de cineva drept periculos din punct de vedere politic? Nu s-a sfiit să discute asta cu mine înainte de 1989. Nu l-au lăsat să mai călătorească în anii 1988 şi 1989, şi a fost un lucru absurd; după 1990 s-a dovedit că nici nu avea de gând să lucreze în străinătate, nici nu a făcut mai puțină matematică implicându-se în spațiul politicii. Într-un articol din *Observator cultural*, Liviu Ornea s-a referit la memoria lui Stere Ianuş spunând că a fost un om care a făcut mult bine. Aşa este! Corectă apreciere şi dreaptă rememorare.

Am lucrat prima oară cu el la curs abia în anul III, adică în anul universitar 1991-1992, când am învățat geometria diferențială a varietăților, care pe atunci era un curs obligatoriu pentru 175 de studenți de la secția de matematici pure. Ceva m-a atras în natura cursului, pentru că am ales să studiez şi mai multă geometrie, şi de

atunci tot aşa a rămas. În anul următor (căci pe vremea noastră facultatea de matematică dura cinci ani), am urmat cu profesorul Ianuş cursul opțional intitulat *Capitole speciale de teoria relativității*, un curs clădit în jurul volumului său publicat la Editura Academiei în 1983, dar mult îmbogățit cu puncte de vedere şi rezultate recente. Anul acela, profesorul Ianuş mi-a dat ca temă prezentarea la seminar a unui articol de Katsumi Nomizu; a fost prima dată când am citit despre metrici semi-riemanniene, cele care permit modelarea limbajului necesar teoriei relativității. În vara dintre anii III şi IV, puțin înainte de alegerile din 1992, când la putere a venit patrulaterul roşu, am discutat cu profesorul Ianuş despre perspectivele mele. M-a întrebat ce fel de matematică doresc să studiez. Nu mai doream să urmez analiză matematică, cum crezusem la 19 ani şi pentru care la Bucureşti exista o tradiție superbă, doream de acum să fac geometrie. Probabil din pricina lui am devenit geometru şi am început să urmez cursurile opționale ale catedrei de specialitate. Faptul că nu am ales să-mi scriu lucrarea de licență sub îndrumarea lui l-a rănit şi l-a deranjat. Un an mai târziu, într-o seară, pe coridorul din fața Bibliotecii Institutului Academiei, m-a întrebat cu răceală de ce am optat altfel. A fost începutul unei lungi

suite de neînțelegeri şi de ezitări în relațiile dintre noi, diferențe care nu au întrerupt prin nimic intensitatea comunicărilor ideilor matematice dintre profesor şi student. A continuat să-mi recomande referințe, să-mi sugereze ce să citesc, să-mi spună ce ar fi important să aflu. Atunci când am urmat anul de studii aprofundate în geometrie (cum se numea vechiul nostru master), profesorul Stere Ianuş a pregătit şi ne-a predat un curs intitulat *Aplicații armonice între varietăți riemanniene*, un curs actual şi util. A fost, alături de cursul la fel de interesant al dnei Adriana Turtoi, intitulat *Tehnici Bochner*, pe care l-am urmat în acelaşi an, cursul meu favorit de geometrie din câte am urmat la Bucureşti. Am discutat enorm cu profesorul Ianuş anul acela, şi el mi-a sugerat să studiez mai în profunzime tema submersiilor riemanniene. Nu ar fi aici locul pentru a povesti despre ce este vorba, dar ar merita spus că descoperirea aşa-numitelor ecuații fundamentale ale submersiilor riemanniene[3] s-a făcut relativ târziu în decursul dezvoltării

[3] Descoperirea îi aparține lui Barrett O'Neill, de la UCLA. Atunci când unul dintre foştii doctoranzi ai lui B. O'Neill, Edsel Stiel, a ieşit la pensie, în 2002, de la Cal State Fullerton, Departamentul de Matematică a scos postul la concurs şi a sfârşit prin a mă angaja pe mine, care veneam de la alt capăt al lumii, dar aveam o formație academică similară profesorului în locul căruia am fost angajat. Ceea ce mă atrăsese în

geometriei diferențiale moderne, abia în 1966. Nu exista pe atunci nici o monografie specializată care să fie dedicată integral submersiilor riemanniene, aşa că bibliografia obligatorie era compusă dintr-o serie de articole pe care le fotocopiam la Biblioteca Institutului. (Azi e mult mai simplu: *download*!) Astfel, de pe urma acelor dialoguri, teza mea de master a ajuns să trateze o temă de submersii Riemann şi a fost profund influențată de interesele matematice de atunci şi de viziunea profesorului Ianuş, deşi nu a fost coordonată de domnia sa. Regret atmosfera de tensiune şi de diferențe de perspectivă politică din perioada aceea, atmosferă care a marcat în multe feluri relațiile personale din întreaga Universitate Bucureşti şi care a dăunat enorm nu doar şcolii de matematică, ci şi altor discipline. Era foarte multă tensiune şi mi-e greu să explic cum de a ajuns tensiunea aceea şi între noi. Inteligent ar fi dacă am aminti azi asta şi dacă n-am mai permite vreodată ca aspectele politice să se amestece cu cele profesionale. Câțiva ani mai târziu am văzut tratatul dedicat submersiilor riemanniene[4] la care profesorul Ianuş

---

anunțul oficial al concursului a fost tocmai descrierea profilului postului.

[4] Maria Falcitelli, Ana Maria Pastore, Stere Ianuş, *Riemannian Submersions and Related Topics*, World Scientific Publishing Co., 2004.

a fost coautor şi care mi s-a părut a ilustra, ca structură, teme şi preocupări, multe dintre gândurile domniei sale. Sunt pagini întregi din carte care arată întocmai ca notele noastre de curs. Am avut ocazia de două ori, în anii din urmă, înainte să se stingă, să stau de vorbă mai mult cu profesorul Ianuş, grație unor conferințe de geometrie organizate în România. După atâția ani, am discutat dincolo de orice veche pasiune. Am discutat despre teoreme şi despre oameni, despre ce înseamnă matematica pentru noi şi cât de importantă e ea pentru societate. Am descoperit că eram de acord cu toate aprecierile dumnealui asupra diverselor subiecte de discuție, de la matematică şi până la politică. La un moment dat, în vara lui 2008, profesorul Ianuş mi-a spus: „tu vei continua să faci şi matematică, dar şi literatură, în acelaşi timp"; de la una dintre acele conversații a venit, de fapt, şi ideea prezentului volum. Atunci am realizat că el era una dintre puținele persoane care ştiau cu adevărat la ce mă gândesc şi ce planuri de viitor am.

Când am aflat că s-a stins, în urma unei maladii de nevindecat, am simțit că lumea mea e mai săracă. Mă bucur că viziunea lui a trecut într-un tratat remarcabil, care va rămâne o referință solidă pentru multă vreme pentru specialistul interesat de subiect. Cred că asta şi-a

dorit cel mai mult şi cred că monografia pe care el şi coautoarele lui au dedicat-o submersiilor riemanniene reprezintă exact asta. Cum de nu am realizat atunci când aveam 24 sau 25 de ani că tema submersiilor riemanniene, despre care discutasem cu dl Ianuş, reprezintă atât de mult?

East Lansing

Am început studiile doctorale la Michigan State University în toamna anului 1996. Pe lângă cele două cursuri pe care le urmam în fiecare săptămână (fiecare însumând trei ore), mai existau şi cinci diferite seminare de cercetare în domeniul geometriei sau topologiei pe care profesorii de matematică le coordonau. Pentru un geometru, această structură de evenimente săptămânale era ideală. Azi, din păcate, nu mai sunt la fel la MSU. Au fost săptămâni când mergeam la toate aceste seminare, cu aceeaşi pasiune cu care, pe vremea când eram în Bucureşti, frecventam spectacolele Teatrului Național sau sesiunile Cenaclului de la Litere, cel coordonat pe atunci de Mircea Cărtărescu. Departamentul de Matematică de la Michigan State era mare, avea un corp profesoral amplu (62 de profesori), care putea susține o activitate ştiințifică bogată şi diversă. Din prima săptămână de şcoală am început să frecventez seminarul de geometrie diferențială de joi dimineața, cel

coordonat alternativ de profesorii Bang-Yen Chen şi David E. Blair. Era un grup activ, care pe atunci comunica în fiecare săptămână rezultate noi sau găzduia câte o prezentare a unui oaspete venit dintr-o altă universitate. Seminarul de joi dimineața avea să devină punctul meu central de interes, neegalat decât de cursul de *Geometrie riemanniană*, pe care profesorul Bang-Yen Chen ni l-a predat în anul universitar 1998-1999. Cea mai mare parte a comunicărilor la seminarul de joi dimineața aparțineau profesorului Bang-Yen Chen, care traversa o extraordinară perioadă de creație. Din câte studiasem încă de la Bucureşti, ştiam că lucrează foarte mult, că e foarte activ, dar numai atunci când l-am văzut îndeaproape la lucru am avut percepția incredibilei forțe imaginative de care dispune. Trebuie să vezi ca să crezi aşa ceva: era o forță creativă de domeniul legendei. Am fost impresionat de perioadele când, săptămână de săptămână, profesorul Chen comunica noi rezultate la seminar. Iar prezentările de câte o oră explicau natura problemei şi creionau importanța teoremei principale şi aplicațiile ei: rareori era timp ca prezentarea efectivă să detalieze şi calculele. Pe acestea le studiam mai târziu, şi aveam avantajul că puteam să-i pun autorului întrebări despre anumite detalii tehnice. În acest seminar am văzut prima dată o anumită

inegalitate geometrică implicând curbura lui Ricci, dintr-o lucrare pe care Bang-Yen Chen o publicase recent. Era înainte de a-mi alege subiectul de teză, dar de atunci am simțit că teoria se poate extinde şi că, probabil, generația mea îi va vedea extensiile şi aplicațiile. Momentul impresionant avea să vină însă în 1999, atunci când autorul teoriei a prezentat în seminar ceea ce azi se numesc invarianții de curbură ai lui Chen, în forma lor cea mai generală. Teza mea de doctorat avea să se nască din acest studiu şi avea să exploreze noii invarianți de curbură şi proprietățile lor. Scrierea ei s-a hrănit din atmosfera de fertilă inspirație pe care seminarul de joi dimineața mi-a transmis-o. După ce lucrările profesorului Chen au apărut în diverse reviste de matematică, mulți autori le-au studiat, au folosit în cercetarea lor rezultatele obținute de el şi i-au citat contribuțiile. Ceea ce mă întristează întru câtva (şi asta se doreşte a fi o remarcă generală despre rosturile matematicii) e că fiecare teorie încununată de succes atrage imitatori. Şi teoria invarianților de curbură ai lui Chen a fost invadată de diverşi pasionați ai geometriei care, în lipsă de idei proprii, au imitat ceea ce Bang-Yen Chen a imaginat, transpunând ideile originale pe teritorii similare şi reproducând demonstrațiile dintâi, de cele mai multe ori într-o manieră

mecanică. Urmând ceea ce am discutat de mai multe ori cu profesorul Bang-Yen Chen, nu mi-am propus să fac niciodată aşa ceva, ci să produc un act de cercetare onest, original, care să-mi dea măsura. Am rămas probabil de atunci cu instinctul de a nu produce două lucrări la fel, de a nu cădea în păcatul imitației mecanice, de a nu repeta necreativ un act care inițial fusese atât de util şi de inspirat. În perioada 1999-2002, când am lucrat la realizarea tezei mele, ritmul apariției de noi rezultate produse de profesorul Chen în domeniul inegalităților despre cantități geometrice reprezentând curbura a fost extraordinar. E posibil ca în multe cazuri eu să fi fost primul cititor al unor materiale.

În toamna lui 2011, profesorului Chen i-a apărut volumul[5] intitulat *Geometrie semi-riemanniană, delta-invarianți şi aplicații*, un tratat amplu de 500 de pagini reprezentând probabil cel mai impresionant tur de forță menit să regândească din temelii ideea de curbură, într-un spirit care implică deopotrivă viziunea clasică, dar şi cea contemporană. Am deschis cu pasiune şi emoție cartea atunci când a apărut. În cuprinsul ei, în câteva locuri, sunt menționate şi câteva dintre eforturile mele, alături de

[5] Bang-Yen Chen, *Pseudo-Riemannian Geometry, Î´-Invariants and Applications*, World Scientific Publishing Co., 2011.

rezultatele altor zeci de cercetători care au contribuit la extinderea teoriei. Abia în toamna aceea, când am avut cartea, am realizat că acesta trebuie să fi fost un alt moment important la care s-a întâmplat să fiu de față. Mi se pare extraordinar că anii noştri cei mai frumoşi se măsoară prin momente de luciditate, eventual prin adâncimea unor teoreme. În spatele lor se află tensiune şi nelinişte, intuiție şi imaginație, şi apoi toate aceste străluciri se organizează într-un corpus unitar, crescut dintr-o realitate austeră, situată în afara noastră, într-o sferă a seninătății clădită pe o stâncă indiferentă la situațiile noastre trecătoare. Deşi ne gândim neîntrerupt la anumite concepte, atunci când la sfârşit vedem construcția întreagă e imposibil să nu ne încerce o oarecare emoție, ca în fața unui ansamblu arhitectonic care ne impresionează. În cele din urmă, e irelevant unde ne aflam când am înțeles un anumit detaliu tehnic. Ceea ce contează în primul rând e construcția.

Istoria unei viziuni medievale (o poveste de la 1350)

Orice imagine poate fi descrisÄƒ printr-o serie de contururi. Unele dintre ele sunt drepte, altele curbate, iar

unele sunt o combinație[6]. Aceste contururi apar peste tot: sunt amprentele noastre, curbele de nivel ale unei hărți, conturul feței într-o fotografie, urma unui organ intern într-o imagine tomografică, traiectoria unui avion pe cer sau arcada de susținere încorporată într-o construcție arhitectonică. Ne interesează să înțelegem forma acestor contururi şi să extragem din analiza lor maximum de informație utilă.

Dacă vrem să discutăm despre momentul istoric când e consemnată pentru prima oară ideea de curbură a unei curbe, trebuie să mergem în veacul al XIV-lea, în Franța, pe vremea lui Nicole Oresme. Povestea pe care o vom spune aici ar merita menționată: e o idee care aparent nu provine de la vechii greci; sau poate provine dintr-o sursă care s-a pierdut între timp.

De origine normandă, Oresme a studiat la Colegiul Navarrei, o instituție fondată în 1304 de Ioana, regina Navarrei, pentru studiul artelor, filozofiei şi teologiei de către studenții care erau prea săraci ca să meargă la Universitatea din Paris[7]. Vreme de secole, Colegiul

---

[6] Oricât de simplă ni s-ar părea fraza aceasta, e o parafrază a unui pasaj cunoscut: aşa clasifica Aristotel locurile geometrice.

[7] Acest colegiu a existat până la Revoluția Franceză, iar clădirile lui au fost atribuite în 1805 recent înființatei Şcoli Politehnice, creată un deceniu mai devreme de Lazare Carnot şi Gaspard Monge.

Navarrei şi-a îndeplinit rolul istoric de a acorda o şansă în ceea ce priveşte educația unor tineri proveniți din medii mai sărace. Aici, Nicole Oresme a studiat artele cu profesori ca Jean Buridan şi Albertus de Saxonia, şi tot aici a scris cele mai importante dintre tratatele sale. Unul dintre ele este *De proportionibus proportionum*, în care discută anumite aspecte care astăzi țin de algebră. În primul capitol, Oresme vorbeşte, între multe altele, despre media aritmetică şi media geometrică a două numere. Un alt tratat este *Ad pauca respicientes* (titlul e dat de primele cuvinte din tratat şi înseamnă *Privind anumite lucruri*), în care Oresme analizează, între altele, mişcările corpurilor cereşti. În această carte, el studiază deplasările unor mobile care urmează traiectorii circulare concentrice, şi citim aceste pasaje ştiind că autorul avea în minte în principal mişcările aparente ale planetelor. După ce şi-a primit aşa-numita *licence* în teologie, adică echivalentul doctoratului actual, în anul 1356, Oresme a primit o poziție de conducere la Colegiul Navarrei, pe care avea să o ocupe până în 1362. În perioada aceea a scris multe dintre masivele sale tratate în latină, pe care le vom menționa mai jos. În jurul anului 1356 avea deja relații apropiate cu viitorul suveran Carol al V-lea cel Înțelept (care a domnit între 1364 şi 1380). În 1362 a primit o poziție importantă

la Catedrala din Rouen, iar în 1364 a devenit decan al Catedralei (unii comentatori au speculat că ar fi fost în acelaşi timp şi capelanul suveranului). Cu sprijinul regelui, a devenit episcop la Lisieux în 1377, unde s-a stins în 1382. Acestea ar fi datele istorice, care trasează o biografie similară cu a unor personaje din romanul *Numele trandafirului.*

În perioada când a fost la Rouen[8], Oresme l-a tradus pe Aristotel din latină în franceză. Această versiune a volumului *De caelo* al lui Aristotel are o istorie curioasă. A fost tradus din greacă în latină de Robert de Lincoln, pe la 1250, o traducere corectată şi completată de William de Moerbeke în jurul anului 1265, iar această versiune latină a stat la baza traducerii în franceză pe care a făcut-o Oresme. După unele opinii, se pare că Oresme nu cunoştea limba greacă şi de aceea a recurs la latină pentru a intermedia traducerea din Aristotel. Exegeza ulterioară pe textele lui Oresme a produs observații de mare minuțiozitate, cineva sugerând că unele dintre lucrările lui au fost scrise de mai multe mâini, ceea ce sugerează un

[8] Aceste precizări provin din ediția Nicole Oresme, *Le livre du ciel et du monde*, editată de Albert D. Menut şi Alexander J. Denomy, University of Wisconsin Press, Madison, 1968.

proces complex de copiere sau probabil de dictare[9]. Aceste informații sunt importante pentru că plasează într-un anume context cultura din perioada istorică în care a trăit Nicole Oresme şi justifică semnul de întrebare asociat paternității unora dintre ideile pe care le regăsim în opera sa.

Între tratatele lui Oresme se numără şi *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, scris probabil între anii 1351 şi 1355[10] şi care a rămas vreme de veacuri în manuscris. Versiunea pe care cercetătorii de azi o consideră ca fiind cea originală a fost recuperată după compararea a paisprezece cópii care au circulat pe cele mai diferite traiectorii. Acest tratat, pe care îl vom numi pe scurt *De configurationibus*, atinge performanțe neaşteptate pentru ştiința epocii. Întâi de toate, Nicole Oresme vorbeşte despre uniformitate şi diformitate[11], în formulări care îl înscriu printre precursorii calculului diferențial

[9] Întâlnim observația aceasta într-o teză de doctorat intitulată *The Questiones super De celo of Nicole Oresme*, susținută de Claudia Kren în 1965 la Universitatea Wisconsin.

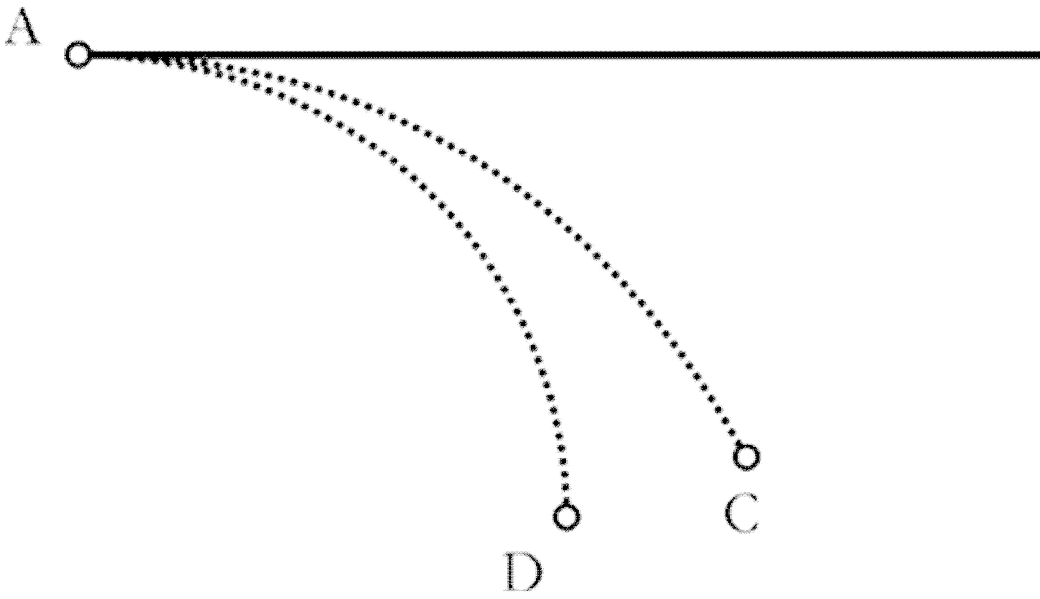
[10] Această datare, care nu e deloc un lucru simplu, se datorează analizei lui Marshall Clagett, într-o reeditare a tratatului la University of Wisconsin Press, în 1968.

[11] Unul dintre capitolele tratatului se intitulează „De qualitate uniformi et difformi”.

modern, dar fără să apară undeva ideile moderne de funcție sau de calcul cu funcții. În partea întâi a tratatului *De configurationibus* regăsim, în capitolele 20 şi 21, ideea de curbură prezentată într-o manieră deloc diferită de o explicație intuitivă potrivită şi pentru zilele noastre[12].

Raționamentul lui Nicole Oresme este următorul. Pentru el, curbura are, la fel ca şi alte „calități", „extensie şi intensitate", iar „un anumit fel de curbură este uniform, în timp ce altul este diform". După aceste expresii vedem că, deşi intuiția nu-i lipsea deloc, Nicole Oresme ar fi beneficiat foarte mult de pe urma limbajului funcțiilor. Ar fi putut spune, de pildă, că se gândeşte la funcția curbură în funcție de un parametru. Dar pe atunci nu exista această terminologie. Şi mai e ceva în legătură cu limbajul. În limbajul contemporan nouă, curbura unei curbe plane într-un punct este un număr asociat curbei în punctul respectiv. Or, la Oresme terminologia nu include această distincție: linie curbă şi curbură sunt desemnate de el prin acelaşi termen, *curvitas.*

[12] Capitolul 20 se intitulează „De uno modo dicendi de curvitate quantum ed eius difformitatem". Capitolul 21 poartă titlul „De quodam alio modo dicendi de curvitate".



Să urmărim raționamentul lui Oresme pe figură. El consideră linia dreaptă *AB* şi două linii curbe *AC* şi *AD*, cu care linia dreaptă are în comun punctul *A.* Oresme propune să se spună că linia *AD* este mai curbată decât linia *AC* dacă unghiul *BAD* este mai mare decât unghiul *BAC.*

Asta este, firește, o idee intuitivă, dar e încă departe de pasul esențial, cel care ar răspunde cel mai bine provocării definiției. În fond, ce ne-am dori de la o definiție a curburii? Ne-am dori să asociem curburii un număr. Ne-am dori să trecem de la *formă* la *cantitate*, pentru ca informația calitativă să devină cantitativă şi să putem

opera cu curburi aşa cum operăm cu orice alte cantități. Aici, Nicole Oresme porneşte de la ideea că „orice curbură circulară este uniformă şi reciproc, iar orice altă curbură este diformă”[13].

În capitolul 21 al tratatului *De configurationibus*, Nicole Oresme prezintă o definiție a curburii. Iată pasajul latin: „Sit circulus maior cuius semidyameter sit *AB* et circulus minor cuius semidyameter sit *AC*. Si ergo semidyameter *AB* dupla est ad semidyametrum *AC*, curvitas minoris circuli erit duplo intensior curvitate maioris, et ita de aliis proportionibus et curvitatibus”. Adică: „Fie un cerc mare de rază *AB* şi un cerc mic de rază *AC*. Dacă raza *AB* este dublul razei *AC*, atunci curbura cercului mai mic va fi de două ori mai intensă decât curbura cercului mai mare, şi similar pentru alte proporții şi curburi”.

Aceasta e prima apariție documentată a ideii. Şi azi, când explicăm la curs conceptul de curbură, în sens modern, în aceşti termeni prezentăm intuitiv ideea. Julian Coolidge, un geometru şi istoric al matematicii care a

[13] În original: „Omnis curvitas circularis est uniformis et econverso, et omnis alia curvitas est difformis”. Oresme nu porneşte de la o presupunere hazardată: se poate specula că ideea aceasta e o continuare a proprietăților cercului, aşa cum apar ele în *Elementele* lui Euclid.

discutat apariția ideii[14], își punea o întrebare mai mult decât legitimă: oare a fost ideea lui Nicole Oresme? Dacă da, atunci avem de-a face cu un fulger din senin, pentru că nimic în literatura precedentă nu prevestea această definiție. Iar pregătirea academică a autorului nu promitea o astfel de contribuție. Dar dacă nu a fost ideea lui? Căci veacul al XIV-lea era un veac al compilațiilor și al sintezelor, al cronicilor cu surse amestecate, al traducerilor din surse neașteptate, al lucrărilor scrise la mai multe mâini. Întrebarea asupra paternității acestei idei e legitimă: oare textul lui Oresme să fi fost sursa primară a ideii? Există oare vreo lucrare mai veche, de care Oresme avea știință și pe care omite să o citeze, unde se discută despre curbură în aceşti termeni? Firește, e foarte posibil ca ideea să fi fost a lui și paragraful amintit mai sus să fie mărturia unei intuiții geniale, demnă de povestit și de admirat și la mai bine de șase veacuri de atunci.

Cum arăta lumea lui Nicole Oresme? Una dintre cele mai bune descrieri ale Franței acelei vremi sunt *Cronicile* lui Jean Froissart, care consemnează în perioada 1348-1350 venirea ciumei negre, precum și apariția, în 1349, a

---

[14] J.L. Coolidge, „The Unsatisfactory story of curvature”, *American Mathematical Monthly*, 59 (1952), 375-379.

procesiunilor de autoflagelanți venind din Germania. Aceştia erau, spune cronicarul, oameni care făceau penitență şi se loveau cu bice din piele înnodată, cu țepi de fier. Treceau pe străzile oraşelor cântând despre Sfânta Naştere şi despre suferințele Domnului. Tot în perioada aceea, consemnează cronicile lui Froissart, au avut loc o serie de pogromuri împotriva evreilor, în întreaga lume, cu excepția Avignonului şi a domeniilor Bisericii aflate sub protecția Papei. În 1350, consemnează mai departe Froissart, a avut loc bătălia maritimă dintre spanioli şi englezi la Winchelsea, cea în care regele Eduard a poruncit cârmaciului său să îşi îndrepte vasul cu prora către o corabie spaniolă mult mai mare şi mai stabilă, strigând „I want to have a joust at it!". Şi până la urmă s-a salvat capturând corabia spaniolă, pentru că cea veche s-a scufundat în plină bătălie (la o aşa idee, aşa final). Iar în 1356 a avut loc bătălia de la Poitiers, în care armata engleză a capturat regele francez, după o combinație care aminteşte de scopul strategic al jocului de şah.

Veacul lui Nicole Oresme nu a fost deloc, cel puțin în Franța, unul al meditațiilor şi al studiului în singurătate. Dimpotrivă, a fost o perioadă istorică plină de tragedii. Dacă definiția curburii a fost gândită pentru prima dată în

acele vremuri, atunci e una dintre cele mai mari surprize care ne vin din bibliotecă.

Am aflat că prima consemnare a conceptului de curbură apare la Nicole Oresme de la profesorul Bang-Yen Chen, într-o scurtă conversație pe care am avut-o în biblioteca Departamentului de Matematică de la Michigan State University, în toamna lui 1999. Am fost atât de surprins că o asemenea idee ar fi putut să fie concepută la mijlocul veacului al XIV-lea, încât am simțit nevoia să aflu mai multe despre contextul istoric al momentului. În fond, nu era conceptul de curburÄƒ ideea centralÄƒ pe care o studiam?

O provocare pentru vremurile noastre: predarea geometriei

Dacă subiectul nu mi s-ar părea important pentru România de azi, nu m-aş gândi să revin asupra acestei teme aici.

Am început să predau la California State University din Fullerton în toamna anului 2002. Pe atunci nu ştiam prea multe despre California, dar pe măsură ce am început să înțeleg ce rol important are sistemul universităților de stat pentru societatea Californiei, contextul universitar mi s-a

părut tot mai interesant. Mă aflam în şcoala care pregătea cei mai mulţi viitori profesori de liceu din sudul Californiei. Unul dintre cursurile pe care le aveam de predat era cel de *Fundamentele geometriei.* Cursul fusese gândit în urmă cu cinci decenii pentru a răspunde nevoilor studenţilor cu specializare în matematică pură, dar între timp dinamica audienţei cursului se schimbase: majoritatea studenţilor care optau pentru acest curs erau interesaţi de o specializare în didactică matematică. Aşadar, nu era vorba de viitori cercetători, ci de viitori profesori de liceu. Cursul fusese predat pentru multă vreme, înainte să încep să-l predau eu, după un manual interesant[15], care includea între altele elemente de trigonometrie sferică, geometrie proiectivă şi calcul vectorial pentru a ajunge să expună idei pe care le regăsim şi în geometria de care avem nevoie pentru a înţelege teoria relativităţii. Am folosit acel manual în primăvara lui 2003 şi l-am găsit superb, după gustul meu, dar parcă îi lipsea ceva. Mi s-a părut că studenţii îl găseau prea abstract, că nu erau motivaţi să studieze conţinutul materiei. Îmi place să propun studentului la curs toată argumentaţia şi să ofer toată motivaţia de a se

[15] Patrick J. Ryan, *Euclidean and Non-Euclidean Geometry: An Analytic Approach*, Cambridge University Press, Cambridge; ediţia I: 27 iunie 1986.

familiariza cu materia, care îmi doresc să fie cât mai utilă în viitoarea profesiune a studentului. Cel mai bine se lucrează cu studenții atunci când ei ştiu că materia discutată la curs le serveşte în viitoarea lor meserie, când sunt convinşi că materialele cursului sunt actualizate şi că referințele sunt la zi.

O haină nouă pentru povestea geometriei

Am început să discut cu studenții şi să-i întreb ce i-ar interesa cel mai mult. Pentru studenții care îşi propuneau să devină profesori de şcoală generală sau de liceu fundamentele geometrice ale teoriei relativității erau o curiozitate interesantă, dar nu mai mult de atât. Mi-au spus că nu vor folosi niciodată aceste concepte în munca lor. Şi atunci, ce cale ar fi trebuit să adopt? Era clar că acel conținut al cursului care se potrivea în 1987 avea o problemă de credibilitate a discursului în 2003, pentru că motivațiile studenților erau altele. Există o dinamică a interesului universitar pe care, dacă eşti atent, o poți înțelege în sala de curs. Am schimbat întreaga viziune a cursului, alegând ca manual o carte foarte interesantÄƒ[16], mai recentÄƒ, axatÄƒ în principal pe geometria

[16] Saul Stahl, *The Poincaré Half-Plane: A Gateway to Modern Geometry*, Jones and Bartlett Publishers, Boston; ediția I: 9 aprilie 1993.

neeuclidiană, mai precis pe semiplanul hiperbolic al lui Poincaré. M-am gândit că dacă studenții mei de azi sunt viitori profesori de liceu, o analiză aprofundată a contextului logic (aşa cum geometria neeuclidiană ne permite să discutăm) ar putea fi cea mai interesantă extensie a culturii lor matematice. Am fost atât de mulțumit de abordare, încât am predat cursul cu acest punct de vedere în 2004 şi am repetat experiența şi în primăvara lui 2005. Către finalul cursului foloseam pentru a modela geometria hiperbolică numere complexe, într-un tratament destul de tehnic, pe care l-am prezentat în detaliu. Din punct de vedere matematic, era cea mai firească abordare. Dar şi aici am simțit că pe studenții care se pregăteau pentru a deveni profesori de liceu partea aceasta a cursului îi atrăgea cel mai puțin. Am analizat din nou toate manualele care erau disponibile, am început să citesc şi să studiez şi mai mult. Fiecare curs poate fi prezentat în foarte multe feluri, dar eu îmi doream exact acel punct de vedere pentru fundamentele geometriei care să servească cât mai mult studenților mei. Doream un curs în care fiecare oră să fie utilă şi interesantă. Văzusem un astfel de curs predat la Bucureşti de regretatul profesor Laurențiu Panaitopol, cursul de metodică a predării matematicii. După ce terminasem facultatea la Bucureşti,

predasem seminarul acestui curs în toamna anului 1995. Acum aveam nevoie de o idee care să fie la fel de utilă studenților din California pe cât le era de utilă ideea academică a lui Laurențiu Panaitopol studenților care deveneau profesori de liceu în România. Abia în primăvara anului 2006 am găsit soluția ideală, şi ea a fost prilejuită de publicarea cursului de fundamentele geometriei scris de Gerard Venema, pe care l-am suplimentat cu o discuție a lucrărilor originale. Am pornit de la următoarea întrebare: în fond, de ce studiem geometria? De ce este importantă geometria pentru învățământul general? Nu pentru a lucra în viața reală cu triunghiuri şi cercuri: reprezentarea lor în lumea reală nu ne ajută prea mult. Ci pentru că geometria reprezintă cel mai bun antrenament al logicii. Nu aveam nevoie de nimic care să poată fi privit de studenți drept o complicație artificială. Cursul meu trebuia să fie o poveste întreagă, care să includă tot conținutul logic şi felul cum geometria antrenează intelectul pentru exercițiul raționamentelor formale.

Povestea pe care am spus-o la curs începe astfel. În cea de-a doua jumătate a secolului al XIX-lea, mai mulți matematicieni au observat că sistemul axiomatic prezentat în *Elementele* lui Euclid nu e perfect. Mai precis, conține erori de demonstrație, greşeli de logică, afirmații care nu

rezultă din premisele considerate. Faptul în sine e surprinzător, pentru că vreme de mai bine de două mii de ani *Elementele* lui Euclid au reprezentat referința primară pentru geometrie. Şi cu toate acestea, construcția aceea nu fusese impecabilă. Prima unitate a cursului meu trebuia aşadar să detalieze structura sistemului axiomatic al lui Euclid şi lacunele pe care acesta le conține, făcând trimitere la contribuțiile importante ale lui Pasch[17] şi Peano[18], contribuții care au clarificat scopurile pe care metoda axiomatică ar trebui să le urmărească în fundamentele geometriei. Apoi, în chip de fericită întorsătură a situației, trebuia povestit cum David Hilbert a construit, în ultimul deceniu al veacului al XIX-lea, primul sistem axiomatic al geometriei lipsit de lacune logice. Cursul meu trebuia să includă şi o prezentare a acelei extraordinare contribuții.

Puncte de vedere utile şcolii de azi

În anii de după Primul Război Mondial, în Statele Unite a apărut nevoia de a prezenta publicului larg sistemul

[17] Moritz Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1882.

[18] Giuseppe Peano, *I principii di geometria logicamente esposti*, Fratelli Bocca, Torino, 1889.

axiomatic al lui Hilbert. Încercând să explice acest subiect, G.D. Birkhoff a observat că abordarea lui Hilbert este dificilă şi greu de comunicat. Sistemul lui Hilbert avea nu mai puțin de douăzeci de axiome şi necesita o subtilitate logică pentru care era nevoie de o experiență pe care de multe ori studenții nu o au. Astfel, Birkhoff a înțeles că ar fi mare nevoie de un sistem axiomatic mai simplu, conceput pentru a fi predat în liceu. Creația lui Birkhoff, un nou sistem de axiome pentru geometria plană, a fost rodul unui deceniu de reflecție motivată de necesitatea de a pune la dispoziția şcolii o teorie utilă procesului de învățământ. Lucrarea[19] în care el a expus şi prezentat acest sistem axiomatic a fost publicată la începutul anilor treizeci în *Annals of Mathematics* şi a devenit, vreme de aproape trei decenii, cea mai importantă referință în materie de predare a fundamentelor geometriei pe înțelesul unui public cât mai larg. Avantajul sistemului axiomatic al lui Birkhoff era că folosea numai patru axiome şi, tocmai de aceea, avea o structură foarte simplă. Dar şi acest sistem dădea naştere unor dificultăți tehnice, pe care eu le-am ilustrat la curs trecând în detaliu prin cele mai interesante demonstrații. Am arătat că aşa se preda

[19] George David Birkhoff, „A set of postulates for plane geometry”, *Annals of Mathematics*, 33 (1932), 329-345.

geometria în anii patruzeci, după ce Birkhoff şi-a publicat manualul, care s-a bucurat de atenţie şi a fost la vremea lui (a apărut în 1940) foarte util. Cu abordarea aceasta, studenţii mei au început să fie realmente interesaţi: le expuneam istoria predării geometriei în Statele Unite. Era istoria meseriei lor, era exact ceea ce le-ar fi fost cel mai util.

Abia la finele anilor cincizeci, Saunders Mac Lane, un experimentat cercetător interesat de problemele educaţiei, a revăzut sistemul axiomatic al lui Birkhoff şi a propus un nou sistem axiomatic. Această regândire a fundamentelor geometriei pentru a servi mai bine nevoilor şcolii avea să producă o adevărată revoluţie în materie de educaţie: după publicarea contribuţiei lui Mac Lane[20], abordarea asupra geometriei a fost ideală (în sensul că sistemul axiomatic prezentat publicului larg era corect din punct de vedere logic şi în acelaşi timp devenise accesibil şi liceenilor, ceea ce nu cred că se poate spune despre sistemul axiomatic al lui Hilbert). Primul manual scris în acest spirit a fost cel al lui Edwin E. Moise. Cititorul care îşi aminteşte manualul românesc de *Geometrie* de clasa a IX-a din anii optzeci ştie despre ce este vorba: acel manual era scris în spiritul

[20] Saunders Mac Lane, „Metric Postulates for Plane Geometry", *American Mathematical Monthly*, 66 (1959), 543-555.

abordării axiomatice a lui Edwin E. Moise. Deci, acel manual era rezultatul unei evoluții a prezentării metodei axiomatice în America de Nord. În manualul românesc se amintea care este sursa de inspirație încă din primele rânduri ale cuvântului înainte. Odată ajuns aici cu prezentarea istorică, cursul pe care îl predau viitorilor profesori îşi putea permite luxul de a deveni mai tehnic, de a considera un set de axiome, cel urmat de manualul lui Gerard Venema (a cărui a doua ediție a apărut în 2012), şi de a urma apoi toate demonstrațiile, la un nivel de rigoare care de obicei nu e acoperit de manualele de liceu. Pentru că, trebuie spus, sunt lucruri subtile care țin de fundamentele geometriei şi care au nevoie de demonstrație riguroasă. Mai mult decât atât, la curs trebuie arătat cum anume repară abordările de azi lacunele logice pe care le conținea sistemul axiomatic al lui Euclid. „Matematicile elementare sunt matematici de întemeiere”, scria Dan Barbilian în prefața unor note de curs. Iar Barbilian îl audiase pe David Hilbert, la cursul de fundamentele matematicii, în toamna anului 1921; întâlnirea aceea nu avea să fie fără urmări pentru formația celui care avea să predea în anii treizeci fundamentele matematicii la Universitatea din Bucureşti.

Geometria în secolul XXI

De ce am ținut să comentez aceste lucruri în această serie de eseuri? Pentru că ceea ce se petrece în ultima vreme în multe sisteme şcolare din întreaga lume nu e de bun augur. A renunța la punctul de vedere axiomatic în geometrie în favoarea unui mixaj (facil!) de geometrie analitică şi algebră este, pentru orice şcoală, în particular pentru şcoala românească, o catastrofă. Geometria nu ar trebui privită drept un suport pentru materiile inginereşti, ci e mult mai folositoare dacă îşi reia rolul de câmp de antrenare a logicii. Obiectele ei de studiu sunt naturale şi familiare (ne putem lesne reprezenta unghiuri şi drepte), definițiile nu sunt deloc complicate, toate premisele şi ipotezele se pot descrie complet, demonstrațiile sunt simple şi pot fi înțelese vizual. Mai mult, demonstrațiile au nevoie uneori de o idee netrivială, şi tocmai folosirea acestui pas calitativ reprezintă exercițiul care pune în valoare natura argumentației. Din pricina aceasta ar fi nevoie acum, mai mult ca oricând, de punctul de vedere axiomatic asupra geometriei, iar nu de o „barbarie calculatorie", după cum tot Barbilian scria altundeva. Nu voi insista aici asupra detaliilor tehnice ale cursului meu, asupra elementelor de geometrie avansată euclidiană sau hiperbolică pe care le demonstrez în partea finală a

semestrului. Dar aceasta e povestea cursului de fundamentele geometriei pe care-l susțin la Cal State Fullerton în fiecare primăvară.

Dacă în anii şaptezeci şi optzeci geometria se preda inteligent în liceele din America de Nord şi Europa, ce s-a întâmplat oare cu abordarea aceea de a fost înlăturată în favoarea unor diluări care nu reţin valoarea educativă a ideii originale?

Citindu-i pe Huygens, Newton şi Euler

Olanda din vremea lui Christiaan Huygens, la jumătatea veacului al XVII-lea, era un spațiu al libertății, unde toleranța religioasă şi gustul pentru artă făceau casă bună cu interesul pentru cultură şi pentru comerț. Era locul în care a venit să lucreze René Descartes (1596-1650), epoca lui Rembrandt (1606-1669), a lui Johannes Vermeer (1632-1675) şi a lui Benedict de Spinoza (1632-1677). Într-un astfel de spațiu al interacțiunilor s-a născut formularea unei probleme importante: cum se poate construi un pendul ale cărui bătăi să fie egale şi care, astfel, să păstreze aceeaşi perioadă de oscilație pentru un interval de timp cât mai lung? Descoperirea datează din decembrie 1656 şi îi aparține lui Christiaan Huygens (1629-1695).

Pentru un pendul obişnuit, care ar consta dintr-o tijă uşoară la capătul căreia s-ar afla o greutate, punctul material determinat de greutate descrie un arc de cerc. Un astfel de pendul nu ar fi un instrument bun pentru măsurarea timpului, pentru că perioada unei oscilații depinde de amplitudinea mişcării pe care o imprimăm pendulului. Cu cât îi deplasăm mai mult greutatea față de punctul de repaus, cu atât mai lungă va fi oscilația. Marea descoperire a lui Huygens este aceea că dacă greutatea nu ar oscila de-a lungul unui arc de cerc, ci de-a lungul unui alt tip de curbă, atunci ar exista posibilitatea ca intervalul de timp corespunzător fiecărei oscilații să nu depindă de amplitudinea mişcării de oscilație imprimate pendulului[21]. Huygens a numit o astfel de curbă *izocronă*. Ideea aceasta ne surprinde şi azi intuiția, aşa că nu e de mirare că a contrariat în veacul al XVII-lea.

De fapt, curba parcursă de traiectoria descrisă mai sus fusese studiată înainte de o pleiadă de geometri, între care Galileo, Torricelli, Mersenne, Roberval, Fermat, Descartes sau Pascal, dar nici unul dintre aceştia nu a pus în

[21] Lucrarea *Horologium oscillatorium* se poate citi la http://historical.library.cornell.edu/kmoddl/toc_huygens1.html.

evidență proprietatea ei de izocronicitate[22]. Era vorba despre cicloidă. Descrierea fizică a cicloidei e simplă. Să ne imaginăm o bicicletă mergând drept şi să considerăm un punct fix de pe cauciucul uneia dintre roți. În timpul deplasării, acest punct material descrie o cicloidă.

Acum să ne imaginăm că întoarcem această curbă invers. Ne-am dori ca greutatea de la capătul pendulului să descrie un arc de cicloidă, iar nu de cerc.

Dar cum să faci greutatea să oscileze de-a lungul unei traiectorii diferite de un arc de cerc? Şi aici intervine geniul lui Huygens: cicloida ca traiectorie a greutății de la capătul tijei nu se poate obține în absența unor restricții de mişcare. Aşadar, mişcarea tijei trebuie restrânsă între două plăci curbate de metal sau de lemn, care să oblige greutatea să descrie nu un arc de cerc, ci un arc de cicloidă. Când tija se mişcă pe traiectoria ascendentă, ea e obligată să se curbeze de-a lungul uneia dintre cele două plăci, astfel încât traiectoria greutății să nu fie un cerc. Când oscilația începe mişcarea descendentă, tija îşi recapătă forma rectilinie, apoi reîncepe traiectoria ascendentă în partea opusă.

---

[22] Vezi A. Knoebel, R. Laubenbacher, J. Lodder, D. Pengelley, *Mathematical Masterpieces: Further Chronicles by the Explorers*, Springer Verlag, New York, 2007, p. 169.

Marele secret avea să fie forma pe care cele două plăci trebuie să o aibă. Huygens a calculat forma lor optimă şi a numit această curbă *evolutus* sau, cu un termen încetățenit în traducerile mai vechi ale terminologiei, desfăşurătoare. Mai mult, Huygens a descris proprietățile geometrice ale evolutelor în general, nu doar pe cele ale cicloidei. De fapt, evoluta este acea curbă care trasează centrele cercurilor de curbură ale unei curbe date, şi din acest motiv cercetarea lui Christiaan Huygens e amintită atunci când se discută istoria ideii de curbură. Poate că e curios, dar şi problema măsurării precise a timpului e legată de aprofundarea ideii de curbură.

Lucrarea, care a rămas în istoria matematicii, a fost publicată la Paris în 1673, cu o licență şi o aprobare formală din partea regelui Ludovic al XIV-lea, Regele Soare.

Interesant e că descoperirea curbei izocrone pare să fi fost una dintre primele idei matematice care au declanşat o adevărată bătălie economică pentru realizarea unor produse comercializabile. Pentru această descoperire, Huygens a solicitat un patent de invenție, care i-a fost acordat în 1657. Pe baza acestei recunoaşteri, el a încredințat în exclusivitate dreptul de fabricație a unor orologii produse după ideea lui unui specialist în ceasuri

din Haga, Salomon Coster. Cel mai vechi orologiu de acest fel care s-a păstrat e datat 1657 şi se află la Muzeul Boerhaave din Leiden. Nu la mult timp după aceea, un fabricant din Rotterdam, Simon Douw, a depus un patent prin care îşi propunea să fabrice un ceas foarte similar, care conținea numai o modificare minoră. Huygens a văzut concurența lui Douw drept un plagiat dintre cele mai scandaloase.

Cuprins de un entuziasm caracteristic începuturilor, Huygens a făcut şi o estimare greşită. El a apreciat că orologiile fabricate pe baza oscilației izocrone îşi păstrează precizia atât pe mare, cât şi pe uscat. Dacă pe uscat afirmația lui e neîndoielnic adevărată, în ceea ce priveşte aplicațiile la arta navigației Huygens a fost excesiv de optimist.

*

Am amintit mai înainte cercul de curbură. Studiul acestui fenomen geometric a fost aprofundat la mai bine de un deceniu de la apariția lucrării lui Huygens de către Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), nimeni altul decât importantul filozof raționalist. În fapt, Leibniz a primit un exemplar al lucrării lui Huygens chiar de la autorul ei, în

perioada când amândoi s-au aflat la Paris, între 1672 şi 1676[23]. Ulterior, el a scris *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi,* în care numeşte cercul de curbură *cerc osculator*[24]. Această terminologie alternativă s-a păstrat până azi.

*

De la problema importantă a măsurării cu precizie a trecerii vremii suntem în măsură să trecem la prima abordare matematică a ideii de curbură. În 1736, a apărut la Londra *A Treatise of the method of fluxions and infinite series, with its applications to the geometry of curve lines*, de Sir Isaac Newton, purtând în subtitlu precizarea: „traducere din originalul latin încă nepublicat". Putem spune că aceasta e prima lucrare în care chestiunea curburii e tratată în mod sistematic. Capitolele poartă titlul problemelor pe care le discută. Enunțul celei de-a patra probleme pare inspirat din vechea geometrie a lui

[23] Vezi Knoebel *et al.*, *op. cit.*, p. 176.

[24] În original, *circulus osculans*, expresie ce ar putea fi tradusă prin „cerc care sărută". Această imagine, a cercului care „sărută" curba, era o formă de a spune că cercul respectiv aproximează cel mai bine forma curbei într-un punct dat.

Euclid: „Să se deseneze tangente la curbe”. Problema a cincea este chestiunea pe care o discutăm noi aici: „Să se determine cantitatea curburii în orice curbă”. Problema a şasea duce discuția un pas mai departe: „Să se determine calitatea curburii în orice curbă”.

În introducerea lucrării, Newton scrie, nu lipsit de oarecare emfază: „Observând că mulți dintre geometrii moderni neglijează metoda sintetică a celor din vechime, ei dedicându-se în principal artei analitice şi grație ajutorului ei depăşind atât de multe şi atât de mari dificultăți, încât toate speculațiile geometriei par epuizate [...]: Acestui scop am considerat că n-ar fi nepotrivit ca, pentru folosința studenților în această ştiință, să concep tratatul ce urmează, unde am îndrăznit să extind fruntariile ştiinței analitice şi să aduc îmbunătățiri doctrinei liniilor curbe”.

Secțiunea care explorează tema curburii e cea care poartă ca titlu problema a cincea: „La orice punct dat al unei curbe date, să se determine cantitatea curburii”. Pasajul respectiv începe cu o judecată care consemnează opinia lui Isaac Newton despre această problemă: „Sunt puține probleme privind curbele mai elegante decât aceasta sau care să ne dea o mai mare înțelegere asupra naturii lor”. Pentru rezolvarea problemei constând în

determinarea curburii, Netwon enunță următoarele patru premise:

„1. În acelaşi cerc, curbura este în orice punct aceeaşi, iar în cercuri diferite curbura e reciproc proporțională cu diametrele lor[25].

2. Dacă un cerc atinge orice curbă pe partea ei concavă într-un punct dat şi dacă forma ei este astfel încât nici un alt cerc tangent nu poate fi înscris în unghiul de contact mai aproape de acel punct, atunci acel cerc va avea aceeaşi curbură ca şi curba în punctul respectiv de contact. Pentru că acel cerc care vine între curbă şi un alt cerc trecând prin punctul de contact variază mai puțin față de curbă şi se află mai aproape de curbura ei decât celălalt cerc considerat; aşadar, exact acel cerc e cel mai aproape față de curbura curbei, iar între el şi curbă nici un alt cerc nu se poate intercala.

3. Aşadar, centrul de curbură în orice punct al unei curbe este centrul cercului la fel de curbat şi deci raza de curbură sau semidiametrul de curbură e parte a perpendicularei care se termină în acel centru.

4. Iar raportul curburilor calculate în puncte diferite va fi aflat din raportul între curburile cercurilor cu aceeaşi

[25] Adică ideea intuitivă care apare la Nicole Oresme.

curbură sau din rapoartele reciproce ale razelor de curbură”.

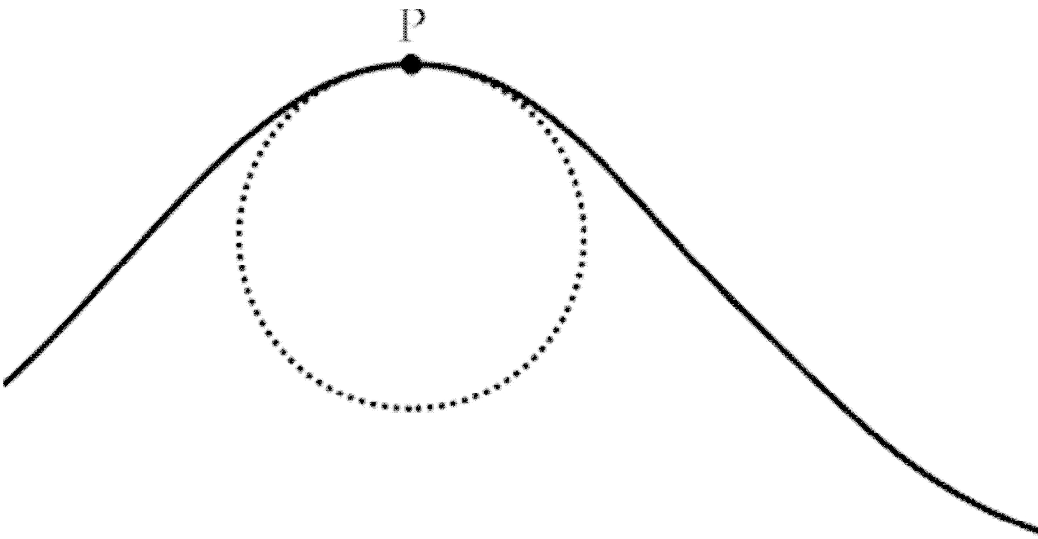
De aici, problema devine într-adevăr una în care abordarea sintetică, în stilul geometrilor din vechime, vorba lui Newton, e utilă. Pentru că problema se reduce la aflarea centrului de curbură şi a razei de curbură.

Aceeaşi idee apare şi în studiile lui Leibniz şi Huygens.

*

Ce este aşadar curbura unei curbe măsurată într-un punct? Să sintetizăm ideea: Curbura este inversa razei acelui cerc care aproximează curba cel mai bine în punctul respectiv.

Să încercăm să explicăm vizual ideea aceasta. În figura de mai jos, cercul desenat este „aproape la fel” ca şi curba ce trece prin punctul *P*. Această aproximație rămâne adevărată numai pe o porțiune a curbei foarte aproape de *P*, dar nu şi pentru alte puncte ale curbei.



Un cerc care poate aprox
curba într-un punct dat

*

Odată ce am văzut ce înseamnă de fapt curbura unei curbe plane, ne propunem să vedem dacă putem extinde această idee la suprafețe. Va fi extensia uşor de făcut sau nu? În fond, cum am putea descrie curbura într-un punct pe o suprafață? Oricât de complicat ar suna, nu e deloc dificil de înțeles şi nici de reprezentat. Ideea se poate

explica în câteva minute. Studenții care urmează matematica întâlnesc această explicație atunci când studiază la curs geometria suprafețelor.

Avem o măsură a dificultății acestei idei: cât a trecut din momentul clarificării definiției curburii pentru curbe plane şi până când definiția pentru suprafețe a fost stabilită, adică peste un secol şi jumătate. Dacă avem în vedere cronologia, ne dăm seama că ideea curburii unei suprafețe nu e un lucru evident şi nu a fost tocmai uşor de determinat.

Să ne propunem ca unui punct situat pe o suprafață să îi asociem o valoare numerică, o valoare care să sugereze *forma*. Acel număr ar reprezenta valoarea curburii.

Să ne întoarcem în timp în anul 1760, atunci când Euler a publicat în cadrul *Memoriilor Academiei de ştiințe din Berlin* o lucrare intitulată *Cercetări asupra curburii suprafețelor.* Raționamentul lui Euler descrie foarte bine dificultatea conceptuală cu care se confrunta el. „Ca să cunoaştem curbura liniilor curbe", scrie Euler, „determinarea razei de curbură ne dă exact măsura justă, oferindu-ne pentru fiecare punct al curbei un cerc, a cărui curbură este exact aceeaşi. Dar, atunci când ne întrebăm asupra curburii unei suprafețe, chestiunea e mai degrabă

echivocă şi deloc susceptibilă de a primi un răspuns absolut, precum în cazul precedent”.

Aşadar, Euler nu are un răspuns pentru definiția curburii unei suprafețe! La aproape un secol de când Newton studiase problema pentru curbe, în a doua jumătate a secolului al XVIII-lea nu exista o definiție clară a curburii pentru suprafețe.

Euler continuă astfel: „Nu avem decât suprafețele sferice cărora le putem măsura curbura, anticipând că de fapt curbura unei sfere este aceeaşi ca şi cea a cercurilor ei mari[26] şi că raza ei ar putea fi privită ca măsura justă a curburii. Dar pentru alte suprafețe n-am şti cum să comparăm curbura cu aceea a unei sfere, aşa cum putem oricând să comparăm curbura unei linii curbe cu cea a unui cerc; motivul e evident întrucât, în fiecare punct al unei suprafețe, am putea avea o infinitate de curburi diferite. Nu avem altceva de făcut decât să considerăm suprafața unui cilindru, unde după direcțiile paralele axei nu avem curbură[27], în timp ce în direcția secțiunilor perpendiculare pe axă, care sunt cercuri, curbura este aceeaşi, iar orice altă secțiune făcută oblic în raport cu

[26] Aici Euler nu a intuit bine: ar trebui să fie vorba despre *pătratul* curburii cercurilor mari.

[27] Sau: curbura e nulă.

axa ne va da o curbură particulară. E la fel şi pentru alte suprafeţe, şi chiar se poate întâmpla ca una dintre curburi să fie convexă, în timp ce alta este concavă, aşa cum se întâmplă pe punctele de pe o şa".

Aşadar, vedem că la 1760 înţelegerea fenomenului se afla încă pe teritoriul tatonărilor şi al speculaţiilor. Consideraţiile lui Euler, citite azi, ne apar mai degrabă imprecise. Chestiunea i se pare, aşa cum scrie el, *echivocă.* Câteva decenii mai târziu, Sophie Germain avea să scrie despre acest memoriu al lui Euler că e lucrarea care cuprinde tot ceea ce se ştia despre suprafeţe la vremea respectivă. Rămâne meritul lui Euler de a fi discutat ideea de curbură pe suprafeţe pentru prima oară. Or, din primele paragrafe remarcăm că punctul lui de vedere se confrunta cu o dificultate esenţială: nu avea la dispoziţie tocmai definiţia...

Mai departe, în memoriul amintit, Euler scrie: „Aşadar, chestiunea curburii suprafeţelor nu e deloc susceptibilă de un răspuns simplu, ci e supusă totodată unei infinităţi de determinări: căci, întrucât putem trasa prin fiecare punct al unei suprafeţe o infinitate de direcţii, ar trebui să cunoaştem curbura prin fiecare, înainte de a ne putea face o idee asupra curburii suprafeţei. Or, prin fiecare punct al unei suprafeţe putem face să treacă o infinitate de

secțiuni, şi asta nu doar în raport cu toate direcțiile de pe suprafață, ci şi în raport cu înclinările lor diferite pe suprafață. Dar, pentru subiectul tratat aici, e suficient să considerăm din infinitatea de secțiuni posibile la suprafață numai pe cele care sunt perpendiculare la suprafață, iar numărul lor e infinit. În acest scop, nu avem decât să desenăm dreapta perpendiculară pe suprafață [într-un punct fixat] şi să considerăm toate secțiunile care trec prin această dreaptă şi sunt aşadar perpendiculare la suprafață, astfel că pentru fiecare dintre aceste intersecții trebuie să căutăm curbura, sau raza de curbură, şi ansamblul tuturor acestor raze ne va da corecta măsură a curburii la suprafață în punctul dat”.

Aşadar, Euler nici măcar nu a intuit răspunsul. Pentru Euler, curbura într-un punct de pe o suprafață e dată de totalitatea curburilor curbelor care trec printr-un punct şi sunt situate în plane normale. Nu sugerează el oare o infinitate de valori posibile? Da, dar asta nu este o valoare numerică, ci un concept vag. Eventual e un ansamblu de valori, o clasă de curbe sau de numere corespunzând unor curbe, dar nu valoarea numerică ce ne-ar putea servi în vreun calcul. În vremea aceea, înainte de Revoluția Franceză şi de războaiele napoleoniene, definiția curburii pe suprafețe nu era încă pregătită să intre în scenă.

În schimb, Euler a demonstrat în studiul lui o teoremă interesantă despre studiul valorii maxime şi al valorii minime a curburii secţiunilor normale trecând printr-un punct de pe o suprafaţă. Fără acea observaţie importantă, probabil că multe dintre clarificările ulterioare nu ar fi fost posibile.

*

Pentru geometria diferenţială există un tratat amplu, în cinci volume, pe care mulţi geometri îl consideră drept referinţă de bază. Se numeşte *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* şi e scris de Michael Spivak. Această lucrare de mari dimensiuni izbuteşte să acopere cea mai mare parte a conceptelor cu care cei care lucrează în domeniu ar trebui să se familiarizeze. Într-un singur loc Michael Spivak izbuteşte să ne dezamăgească. În volumul II, în capitolul „Ce se ştia despre suprafeţe înainte de Gauss", el scrie despre teorema lui Euler de calcul al curburii unei curbe normale la suprafaţă printr-un punct dat: „Nu cunosc demonstraţia lui Euler pentru această teoremă şi, din motive care vor apărea mai târziu, sunt sigur că demonstraţia care va fi prezentată aici e mult mai simplă decât originalul".

Surprinzătoare specificare, într-o lucrare care a beneficiat de succes şi de o asemenea audienţă. Sursele ar fi fost accesibile, textul lui Euler fusese scris în franceză, deci nu ar fi trebuit să fie o problemă. Oricât de reuşită ar fi construcţia monumentală a lui Spivak, tocmai aici face o omisiune şi nu discută referinţa originală.

*

În lumea matematicii există un mit, răspândit cumva şi către publicul larg, şi anume că Euler ar fi avut o intuiţie extraordinară şi o inspiraţie fără greş. Adevărul e că Euler a avut multe intuiţii geniale, dar şi situaţii când nu a văzut cea mai scurtă soluţie. Discutarea acestor lucruri e pentru noi o ocazie rară de a vedea cum a funcţionat mintea celui mai prolific autor de matematică originală din toate epocile.

Pentru aşa-numita problemă a dreptei lui Euler, care în vremurile bune ale şcolii româneşti se studia în orele de geometrie la clasa a IX-a, Euler a dat o soluţie laborioasă, pe baza unei metode înrudite cu geometria analitică. E vorba de acea teoremă care spune că intersecţia înălţimilor într-un triunghi, adică ortocentrul, împreună cu centrul de greutate al triunghiului (intersecţia medianelor) şi

centrul cercului circumscris (situat la intersecția mediatoarelor) sunt situate pe aceeaşi dreaptă. Azi, demonstrația se poate explica în câteva minute şi se poate scrie în două paragrafe scurte. Rezultatul e atât de fundamental, încât Traian Lalescu l-a inclus la pagina trei a tratatului său *Geometria triunghiului*, scris în 1937. Descoperirea acestei proprietăți nu a fost însă la vremea ei lucru uşor. Euler s-a gândit la această problemă vreme de 41 de ani, iar demonstrația pe care a publicat-o în 1765 era calculatorie şi laborioasă. Azi nu ne putem ascunde surprinderea când răsfoim paginile primei demonstrații. Pe atunci raționamentele luau o turnură complicată, ca şi cum orice idee şi-ar fi propus să ruineze sănătatea cuiva până să ajungă la clarificare.

Pentru studentul venit în 1996 de la Bucureşti în Michigan ca să urmeze studiile doctorale, ideea că la finele secolului XX au fost descoperiți noi invarianți de curbură a reprezentat o atracție intelectuală irezistibilă. Gândul că se pot face cercetări fundamentale asupra acestui subiect şi că istoria continuă şi în zilele noastre mi s-a părut un dar pogorât din cer.

Istoria lui Meusnier

Următorul moment remarcabil în istoria curburii e datorat lui Jean-Baptiste-Marie Charles Meusnier de la Place (1754-1793), un personaj cu un destin neobişnuit pentru un matematician. Nimic nu l-ar fi recomandat pentru cercetarea matematică: nu a mers niciodată la şcoală. A învățat acasă, de la tatăl său, tot ceea ce ştia. Pe vremea dinastiei Bourbon, singura instituție unde se putea studia ingineria în Franța era École Royale du Génie Militaire, de la Mézières. În perioada 1771-1773, ca să se pregătească pentru această şcoală, Meusnier a luat lecții particulare la Paris. Momentul apariției la Mézières, când avea 21 de ani, a fost consemnat în 1811 de viitorul lui profesor, Gaspard Monge (1746-1818)[28], astfel: „În ziua sosirii sale [...] a venit să mă vadă către seară şi şi-a exprimat dorința să-i propun o problemă care să mă facă să apreciez cât ştia şi să-i pot judeca aptitudinile. Ca să-l mulțumesc, i-am vorbit despre teoria lui Euler despre raza de curbură minimă şi cea maximă pentru suprafețele curbe. I-am descris concluziile principale şi i-am propus să încerce să le demonstreze. În dimineața următoare, în camerele comune, el mi-a dat o pagină conținând demonstrațiile, dar, ceea ce era şi mai remarcabil,

[28] Monge e un nume celebru în matematică. Azi, importante ecuații îi poartă numele.

argumentele pe care le-a folosit erau mai directe decât cele ale lui Euler, iar drumul pe care l-a urmat, mai natural. Eleganța soluțiilor lui şi scurtul timp de care a avut nevoie ca să le obțină mi-au dat o idee despre perspicacitatea lui şi despre simțul extraordinar asupra naturii lucrurilor care l-au ajutat în studiile pe care le-a făcut mai târziu. I-am arătat volumul Academiei din Berlin care conținea memoriul lui Euler despre suprafețe. Şi-a dat seama repede că mijloacele pe care le-a întrebuințat el erau mai directe decât cele ale modelului său; uneltele sale aveau să fie şi mai fructuoase, pentru că a ajuns la rezultate pe care Euler nu le-a obținut".

Oricât de paradoxal ar suna acest lucru, opera matematică a lui Meusnier constă într-o singură lucrare, un memoriu prezentat în fața Academiei de Ştiințe din Paris în 1776 şi publicat nouă ani mai târziu[29]. Această lucrare e singura contribuție originală în geometria diferențală în lungul interval dintre lucrările lui Euler şi cele ale lui Gauss[30]. Meusnier este cel care a introdus aşa-

[29] „Mémoire sur la curbure des surfaces", în *Mémoires de Mathématique et de Physique présentés à l'Académie Royale des Sciences, par Divers Savants, et lus dans ses Assemblées*, Paris, 10 (1785), 477-510.

[30] Această remarcă, precum şi datele biografice despre Meusnier provin din lucrarea lui Clifford Truesdell intitulată „Jean-Baptiste-Marie

numita formă a doua fundamentală, pe care ne-o putem reprezenta ca pe o matrice pătratică, de dimensiune doi pe doi, care este expresia felului cum „stă” suprafața în spațiul ei ambient tridimensional. Mai bine spus, matricea aceasta marchează urma pe care orice suprafață o lasă în spațiul în care se află. Cu ajutorul ei, Meusnier a obținut formule explicite pentru razele de curbură, iar aceste formule aveau să joace un rol esențial în studiul membranelor supuse vibrației. Teorema care azi poartă numele lui Meusnier afirmă că toate curbele care trec printr-un punct dat de pe o suprafață şi care au aceeaşi tangentă în acel punct trebuie să aibă aceeaşi curbură normală[31]. Mai mult, în acelaşi studiu, Meusnier a descoperit că elicoidul este o suprafață minimală. Euler descoperise în 1744 că şi catenoidul satisface proprietatea de minimalitate.

Pe baza acelui memoriu, Meusnier a fost primit ca membru corespondent în Academie. Truesdell, biograful lui Meusnier, se întreabă: „Ne putem noi oare imagina azi un om ales în Academia Națională numai pe baza unei

---

Charles Meusnier de la Place (1754-1793): an historical note”, apărută în *Meccanica*, 31 (1996), 607-610.

[31] Studiul curburii poate fi rafinat descompunând curbura în alte două funcții: curbura geodezică şi curbura normală.

lucrări nepublicate, şi aceasta într-un domeniu «ezoteric» tratat numai o singură dată în literatură? Ne putem noi oare imagina acest om finanţat la nivel profesional?". Într-adevăr, pe vremea aceea Academia le oferea membrilor ei salarii, fără nici un fel de obligaţii didactice. Îndatoririle lor ţineau mai degrabă de ceea ce astăzi fac referenţii. Meusnier avea să devină membru plin al Academiei la 29 de ani[32] şi nu avea să mai scrie nimic în domeniul care l-a consacrat. Avea să facă în schimb o carieră spectaculoasă în armata lui Napoleon, unde în 1792 a devenit mareşal. Câteva luni mai târziu a fost rănit la Kassel, în timpul asediului de la Mainz. După o agonie de şapte zile, a murit. A avut parte de o înmormântare de erou la Paris. Astăzi, e amintit în fiecare curs de geometrie diferenţială atunci când se studiază curbura curbelor situate pe suprafeţe oarecare.

Am auzit prima oară de el în toamna anului 1990, atunci când am urmat la Universitatea din Bucureşti cursul de geometrie diferenţială pentru anul II. Aveam să aflu despre povestea întâlnirii lui cu profesorul Monge mult mai târziu.

---

[32] Cauchy a devenit membru plin al Academiei Franceze la 27 de ani, iar Clairault la 16!

Sophie Germain

Dacă cineva m-ar întreba care a fost autoarea care m-a impresionat cel mai mult, aş răspunde fără ezitare că e vorba de Sophie Germain (1776-1831). Interesul meu pentru scrierile ei are o motivaţie personală: îi datorez ceva. Ea a inventat curbura medie şi a studiat-o prima oară într-un text care azi ni se pare a fi fost scris cu o generaţie înaintea epocii sale. Când am aflat mai multe despre Sophie Germain, am descoperit o personalitate fascinantă. Atât ca matematician, cât şi ca eseist, impresionează nu doar prin forţa imaginaţiei, ci şi prin eleganţa stilului, într-o combinaţie neaşteptată de rigoare, virtuozitate şi delicateţe. Memoriul ei dedicat studiului curburii, scris într-o primă versiune în 1816, atunci când autoarea l-a trimis pentru a fi considerat pentru un premiu, a văzut lumina tiparului abia în 1831, anul în care, din nefericire, ea s-a stins.

Sophie s-a născut la Paris, pe strada Saint-Denis; a fost fiica unui viitor membru al Adunării Constituante de după Revoluţie. Pentru ea, prima sursă de informaţie ştiinţifică a fost biblioteca tatălui, unde în adolescenţă a citit, între multe altele, despre Arhimede, Aristotel şi întreaga lume ştiinţifică din vechime. Părinţii ei n-au fost prea fericiţi atunci când au aflat de interesul ei pentru

matematică şi au făcut tot ce se putea pentru a o descuraja să mai studieze. Sophie a găsit o soluție: a continuat să citească matematică noaptea.

Când Sophie avea 18 ani, în vremea Revoluției, în 1794, s-a creat Şcoala Politehnică din Paris, unde au predat cei mai importanți matematiceni ai momentului. Pe vremea aceea femeile nu puteau să urmeze şcoala acolo, dar Sophie a reuşit să obțină notele de curs, pe care le-a studiat. La finele anului u niversitar a scris un memoriu, pe care l-a transmis profesorului Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Textul respectiv a constituit o surpriză pentru Lagrange, care şi-a dorit să-l cunoască pe autor, iar surpriza avea să-i fie şi mai mare: era o domnişoară. Acesta este contextul în care Lagrange a început să o îndrume şi să o prezinte altor matematicieni ai momentului. Din 1804 a existat o corespondență între Sophie Germain şi Gauss, aşa că putem spune că ea s-a bucurat de îndrumarea celor mai avizate opinii ale vremii ei. Şi avea ce-i scrie lui Gauss: Sophie obținuse rezultate substanțiale în teoria numerelor. În cercul de matematicieni ai vremii, Sophie a aflat de textele din domeniul geometriei diferențiale ale lui Euler şi Meusnier, cei doi autori care au lăsat cele mai importante contribuții în studiul suprafețelor la finele secolului al XVIII-lea. I-a

studiat pe amândoi, şi acest efort avea să o conducă la descoperirea ei din domeniul geometriei pe care-l aminteam mai sus.

Memoriul din 1831 începe astfel (şi primul paragraf merită reamintit aici, ca măsură a stilului ei rafinat, diferit de al altor autori care au lucrat în acest domeniu auster): „Ne propunem să semnalăm şi să definim un tip de cantități a căror existență nu părea să fi fost bănuită; şi, tratând o problemă care părea epuizată, vom fi obligați să recurgem la distincții care nu au mai fost folosite, la noțiuni singulare în aparență. Fără îndoială, ne-am putea teme că astfel de cercetări care nu se bucură nici de girul unui nume celebru, nici, în ciuda tuturor eforturilor mele, de cadrul unei prezentări strălucite ar putea fi primite cu reținere; în acelaşi timp, cel mai mic grăunte de atenție ar fi suficient pentru a recunoaşte că aceste distincții sunt fundamentate şi că aceste noțiuni rezultă din punctul de vedere sub care curbura suprafețelor apare în anumite probleme”[33].

Şi la aproape două veacuri distanță ne putem da seama: a avut dreptate până la ultima nuanță. A analizat problema până a ajuns la esența fenomenului fizic, pe care

[33] Sophie Germain, „Mémoire sur la courbure des surfaces”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1831, 1-29.

l-a condus la enunțul matematic cel mai general, atât cât i-a permis paradigma momentului. Ca să explicăm problema la care s-a gândit Sophie Germain, vom recurge la o imagine familiară nouă. Să ne imaginăm că parbrizul unei maşini e lovit, în partea curbată, de o piatră, în plină viteză. Să presupunem că avem de-a face cu un parbriz de grosime constantă, realizat dintr-un material omogen, curbat pentru a se potrivi mai bine formei maşinii. În urma impactului, crăpăturile sunt dispuse radial. Cu toate acestea, la o examinare atentă, vom observa că nu toate crăpăturile sunt egale, unele dintre ele sunt mai pronunțate, mai lungi sau mai adânci. Ei bine: în ce direcție are loc cea mai amplă crăpătură şi de ce? Care e legătura între distribuirea tensiunii şi curbură? Cum anume se distribuie forțele dacă geamul este lovit frontal de o anumită forță? Astfel de fenomene au interesat-o pe Sophie Germain. Şi, ca să studieze astfel de fenomene, a imaginat, descris şi studiat o mărime care nu mai fusese pusă în evidență până la ea: curbura medie.

Din nefericire, Sophie Germain nu avea să afle audiența pe care memoriul ei o va avea printre geometri. S-a stins pe 27 iunie 1831. Cu puțin înainte de moartea ei, Gauss determinase Universitatea din Göttingen să îi

confere un grad onorific, pe care ea îl merita cu prisosință...

O altă comparație se impune. Aforismele scrise de Sophie Germain ne amintesc de Cioran. Ea scrie: „Nu ne deranjează nici multul, nici puținul, şi nici privațiunea, ci comparația. Nu suntem săraci decât alături de cei bogați”[34].

Şi încă „Simplitatea nu este în mod esențial un principiu, o axiomă, ci rezultatul muncii: nu este o idee a copilăriei omenirii, ci aparține maturității oamenilor. Cel mai mare adevăr e că observația constantă aderă la iluzia efectelor: poate că acesta nu-i decât un rest al ştiinței primitive”.

Sau încă o formulare extraordinară despre felul cum trebuie studiate fenomenele matematice, dar care admite fireşti extensii şi în alte domenii: „Superioritatea constă în mijlocul de a considera lucrurile dificile dintr-un punct de vedere din care ne devin facile, de unde spiritul le poate cuprinde şi urmări fără efort”. Un astfel de enunț din partea cuiva care chiar a descoperit asemenea concepte e plin de substanță şi ne sugerează că centrul de greutate al

---

[34] *Ĺ'uvres philosophiques de Sophie Germain, suivies de pensées et de lettres inédites*, Elibron Classics, facsimil integral al ediției originale publicate în 1879 de Paul Ritti, Paris.

cercetării e mai degrabă în sfera reflecției decât pe teritoriul calculelor brute.

Dar partea cea mai interesantă a însemnărilor ei mi se pare a fi următoarea:

> „Un géomètre est un homme qui entreprend de trouver la vérité, et cette recherche est toujours pénible dans les sciences comme dans la morale. Profondeur de vue, justesse de jugement, imagination vive, voilà les qualités du géomètre. Profondeur de vue pour apercevoir toutes les conséquences d'un principe, cette immense postérité d'un même père. Justesse de jugement, pour distinguer entre elles les traits de famille, et pour remonter de ces conséquences isolées au principe dont elles dépendent. Mais ce qui donne cette profondeur, ce qui exerce ce jugement, c'est l'imagination, non celle qui se joue à la surface des choses, qui les anime de ses couleurs, qui y répand l'éclat, la vie et le mouvement, mais une imagination qui agit au dedans des corps comme celle-ci au dehors. Elle se peint leur constitution intime, elle la change et la dépouille à volonté; elle fait, pour ainsi dire, l'anatomie des choses et ne leur laisse que les organes des effets qu'elle veut expliquer. L'une accumule pour embellir, l'autre divise pour connaître. L'imagination qui pénètre ainsi la nature, vaut bien celle qui tente de la parer. Moins brillante que l'enchanteresse qui nous amuse, elle a autant de puissance et plus de fidélité.

Quand l'imagination a tout montré, les difficultés et les moyens, le géomètre peut aller en avant; et s'il est parti d'un principe incontestable, qui rende sa solution certaine, on lui reconnaît un esprit sage. Ce principe le plus simple offre-t-il la voie la plus courte, il a l'élégance de son art. Et enfin il a du génie, s'il atteint une vérité grande, utile et longtemps déparée des vérités connues"[35].

---

[35] „Un geometru e un om care-şi propune să găsească adevărul, iar această căutare e întotdeauna dureroasă în ştiinţe, ca şi în morală. Profunzime a viziunii, justeţe a judecăţii, imaginaţie vie, acestea sunt calităţile geometrului. Profunzime a viziunii pentru a percepe toate consecinţele unui principiu, această amplă posteritate a unui părinte comun. Justeţe a judecăţii, pentru a distinge între ele trăsăturile de familie şi pentru a merge dinspre aceste consecinţe izolate către principiul de care ele depind. Dar ceea ce dă această profunzime, ceea ce antrenează această judecată este imaginaţia, nu cea care se joacă la suprafaţa lucrurilor, care le animă cu culorile ei, care răspândeşte acolo strălucirea, viaţa şi mişcarea, ci o imaginaţie care acţionează înlăuntrul corpurilor precum cealaltă în exterior. Ea îşi reprezintă structura lor intimă, o schimbă şi o desface după voia ei; ea face, ca să spunem aşa, anatomia lucrurilor şi nu le lasă decât organele consecinţelor pe care vrea să le explice. Una acumulează pentru a înfrumuseţa, cealaltă desface pentru a cunoaşte. Imaginaţia care pătrunde astfel natura preţuieşte tot atât cât cea care încearcă să o împodobească. Mai puţin strălucitoare decât vrăjitoarea care ne amuză, ea are la fel de multă putere şi mai multă loialitate. Când imaginaţia a arătat totul, dificultăţile şi mijloacele, geometrul poate să meargă mai departe; şi dacă a plecat de la un principiu incontestabil, care să facă soluţia lui sigură, i se recunoaşte o minte înţeleaptă. Acest cel mai simplu principiu oferă calea cea mai scurtă, conţine eleganţa artei sale. Şi, în fine, el are geniu dacă ajunge la un adevăr major, util şi multă vreme ocultat de adevărurile cunoscute."

Despre curbură (partea întâi)

În anii când Meusnier îşi scria celebrul memoriu, se năştea în ducatul Braunschweig Johann Carl Friedrich Gauss. Principala lecție pe care tatăl avea să i-o transmită micului Carl e că munca fizică aduce pâinea cea de toate zilele. Tatăl credea într-o astfel de muncă şi aşa a trăit toată viața. E paradoxal că dintr-un astfel de mediu familial se va ivi primul matematician profesionist al vremurilor moderne. Gauss era atât de înzestrat, încât deşi pe atunci nu existau poziții universitare de cercetare, în care cercetătorii să fie plătiți pentru informația pe care o creează, istoria vremii lui avea să-i inventeze un rol în care el îşi va manifesta strălucirea.

E bine cunoscută anecdota cu micul Carl care, atunci când primeşte la şcoală sarcina meticuloasă de a aduna toate numerele de la 1 la 100, rezolvă problema în câteva clipe observând că e vorba despre 50 de perechi care au fiecare suma 101. Întrucât calitățile lui intelectuale erau neobişnuite, profesorii lui, Büttner şi Bartels, l-au recomandat pentru o bursă ducelui de Braunschweig-Wolfenbüttel, iar sprijinul financiar pe care ducele i l-a acordat lui Gauss îl va face pe acesta să fie recunoscător toată viața. Pe termen lung, modelul politic al ducatului îi

va influența lui Gauss viziunea politică; acesta avea să devină un adept al acelor monarhii luminate administrate în stilul pe care-l văzuse în copilărie şi adolescență sub administrația ducelui.

În 1795, când asupra subiectului geometriei diferențiale domnea liniştea dinaintea furtunii, Gauss a părăsit Braunschweigul natal pentru a studia la Universitatea din Göttingen, unde a urmat cursurile lui Abraham Kästner, care nu a izbutit să-l învețe prea multe, dar, după cum Gauss a dat de înțeles, a reuşit să-l enerveze. Tot acolo s-a împrietenit cu Farkas Bolyai, prin una dintre acele miraculoase conexiuni ale destinului: fiecare dintre ei avea să joace un rol important în clarificarea controversatei chestiuni a postulatului paralelelor. Reputația lui Gauss avea să cunoască o traiectorie ascendentă, în special după ce, în anul 1801, i-a apărut *Disquisitiones Arithmeticae*, acolo unde a adus numeroase contribuții în algebră, în teoria numerelor în particular.

În 1818, Gauss a acceptat sarcina meticuloasă de a completa planul de geodezie al statului Hanovrei. Purtând pe cap o scufie de mătase vişinie, Gauss a făcut şi muncă de teren, şi studiu aplicat, şi măsurători, pe un teren dificil, acoperit de păduri, printre dealuri. Cum să măsori

cu precizie un vast teritoriu atunci când este vorba despre o zonă împădurită, cu vizibilitate redusă, cu instrumente oarecum rudimentare, atunci când nu existau nici sateliți, nici telecomunicații, nici transmisii radio care să permită sincronizarea unei echipe de lucru pe teren? Cu toate acestea, Gauss a reuşit să-şi îndeplinească sarcina din domeniul cartografiei.

Din acest studiu de teren aveau să se nască reflecțiile care au condus la o contribuție teoretică extraordinară inclusă în lucrarea publicată în 1827, initulată *Disquisitiones generales circa superficies curvas*[36]. În această lucrare, Gauss introduce o definiție a curburii unei suprafețe într-un punct dat.

Fără nici o aspirație la rigoare în cele ce urmează, vom descrie aici ideea primei definiții date de Gauss astfel. Să considerăm acum o suprafață fără colțuri (de exemplu, conturul unui deal lipsit de stânci) şi un punct oarecare pe ea. Ne propunem să definim curbura în acel punct. Să ne imaginăm că razele soarelui coboară pe verticala locului. Să ne imaginăm că avem un mic paralelogram care se sprijină pe respectiva suprafață doar într-un colț, în acel plan perpendicular pe verticala locului. Şi acum, cu multă

---

36 Versiunea românească poate fi găsită pe pagina web a profesorului Liviu Ornea, la http://gta.math.unibuc.ro/pages/teachlee.html.

grijă, să măsurăm aria *umbrei* pe care paralelogramul o lasă pe suprafață. Apoi calculăm raportul dintre această arie a umbrei şi aria paralelogramului. Atunci când începem să restrângem paralelogramul, făcându-l tot mai mic, acel raport va avea ca limită o cantitate pe care Gauss a definit-o drept curbură a suprafeței.

Ideea e extraordinară: nici Euler, nici Monge sau Meusnier nu s-au gândit la ea. Cantitatea respectivă a fost în schimb studiată de Olinde Rodrigues (1794-1851), un student al lui Monge de la École Polytechnique, într-o lucrare scrisă în 1815[37].

Dar Gauss nu se opreşte aici. Ne amintim de studiul lui Euler privind distribuția curburii liniare, adică a curburii acelor curbe date de intersecțiile dintre o suprafață şi planele perpendiculare pe suprafață trecând prin punctul dat. Euler a arătat că aceste curburi pot lua orice valori între o valoare minimă k_1 şi o valoare maximă k_2. Vom numi aceste două valori extreme *curburi principale* ale suprafeței.

Gauss a demonstrat că acea curbură a suprafeței, aşa cum am prezentat-o în definiția de mai sus, este egală cu

[37] Dar Rodrigues nu a demonstrat că acel raport este neschimbat la transformări rigide ale suprafeței. Fără acest pas nu se poate vorbi despre o bună înțelegere a curburii unei suprafețe.

produsul dintre k_1 şi k_2. Aşadar, curbura gaussiană a suprafeței într-un punct dat e produsul curburilor principale. Multe manuale de geometrie diferențială preferă să pornească de la această proprietate, în chip de definiție a curburii, şi să obțină celelalte înfățişări ale curburii drept consecințe.

Astfel, curbura unei sfere este pătratul curburii ecuatorului ei. Curbura unui cilindru circular va fi zero, pentru că avem de calculat produsul dintre curbura unui cerc şi cea a unei drepte, generatoarea cilindrului, iar dreapta are curbura zero. Din pricina aceasta cilindrul este *plat* (în contextul studiului curburii, „plat” înseamnă că are curbura nulă în fiecare punct al suprafeței). Intuiția noastră susține foarte bine imaginea aceasta: dacă decupăm cilindrul de-a lungul unei generatoare, îl putem desfăşura pe masă fără nici o deformare. Dacă Pământul ar fi cilindric, în loc să fie sferic, n-am avea nici o problemă să realizăm hărți de perfectă acurateţe şi să le desfăşurăm pe masă fără a deforma realitatea reprezentată.

În fine, studiul lui Gauss mai include un rezultat surprinzător. Dacă desfăşurăm fără deformare o suprafață pe o altă suprafață (harta Hanovrei pe masa ducelui), atunci curbura suprafeței originale nu se schimbă. O coajă

de portocală nu se poate întinde „plat” pe masă. Sau, spus în limbaj matematic, curbura rămâne neschimbată la transformări rigide. Cu alte cuvinte, ca să desenăm o hartă exactă ar trebui să proiectăm un fragment de sferă (Pământul!) pe o bucată de plan (masa). Şi asta e tot ce putem face, câtă vreme ne propunem să citim hărţile pe o reprezentare planară. Pentru o hartă ideală, am avea nevoie de o reprezentare sferică.

Problema cartografiei îl preocupase înainte şi pe Euler. Între lucrările care au rămas de la el, din perioada când se afla la St. Petersburg, se numără şi una în care studiază o problemă de proiecție: cum anume să se reprezinte cel mai bine harta Imperiului Rus.

Gauss avea să numească rezultatul care se referă la curbura ce rămâne neschimbată la transformări rigide *teorema remarcabilă* (în original, în latină: *egregium*).

*

Una dintre cele mai interesante reflecții asupra ideii de curbură a aparținut Sophiei Germain (1776-1831).

Pentru istoria ideii de curbură, contribuția Sophiei Germain a fost de o importanță crucială. Memoriul ei publicat în 1831 include următorul pasaj, care conține

motivația problemei: „Întrucât curbura e comparată cantităților dinamice, nu putem disimula faptul că ea e în mod tacit tratată ca o cantitate de acelaşi fel. Suprafețele nu mai sunt deci considerate doar în raport cu ele înseşi, şi nu e vorba doar de proprietățile lor particulare, nici de cele care sunt comune unei clase dintre ele. E nevoie aşadar să se definească acea cantitate dinamică născută din curbură. Dar această cantitate nu depinde de figura suprafețelor, ci de o condiție care e satisfăcută de un număr infinit de suprafețe diferențiale. De aici se nasc distincțiile necesare, dar a căror folosință nu a fost consacrată încă; sunt noțiuni simple, dar care n-au fost niciodată exprimate efectiv. Dacă, de la începutul acestui memoriu, am fi fost obligați să explicăm atât aceste noțiuni, cât şi distincțiile care le fac indispensabile, sarcina ne-ar fi fost extrem de dificilă. Prin ordinea firească a ideilor, ne găsim într-o situație mult mai favorabilă.

E convenabil să examinăm pentru început care sunt curburile liniare datorate intersecțiilor planelor duse prin unul dintre punctele suprafeței; iar cercetările pe care Euler ni le-a lăsat oferă, în această privință, ajutorul pe care l-am putea dori”.

În prima secțiune a lucrării ei, Sophie Germain reaminteşte rezultatele lui Euler pe care îşi va baza discuția. Partea interesantă urmează abia mai apoi, acolo unde, aşa cum scrie ea, „vom expune câteva considerente noi asupra curburii suprafețelor. Studiul felului cum este dispusă curbura va scoate în evidență numaidecât existența unei cantități medii dependente de curbură, dar comună unui număr infinit de suprafețe de figuri diferite.

Cititorul va vedea că în problemele de natură dinamică, unde curbura e luată în considerare, dacă în timp ce suma forțelor născute din această curbură e independentă de figura suprafeței, dimpotrivă – repartizarea aceloraşi forțe în jurul punctului dat depinde de această figură; astfel încât legea de repartizare a curburii curbelor în jurul unui punct fixat pe suprafață ne dă o corespondență deplină cu ceea ce se ştie despre compoziția forțelor care acționează în jurul acestui punct”.

Partea surprinzătoare a descoperirii făcute de Sophie Germain este enunțată în prima ei Propoziție (nu a numit-o teoremă, probabil din aceeaşi modestie care transpare de-a lungul întregului text), al cărei enunț este următorul: „Oricare ar fi poziția a două plane normale, perpendiculare între ele, duse printr-un punct dat al unei suprafețe oarecare, suma curburilor conținute în aceste două plane

va fi întotdeauna aceeaşi. Ca urmare, această sumă va fi egală cu cea a curburilor principale”.

Din acest motiv, inspirat mai degrabă din considerente de natură fizică, Sophie Germain propune pentru termenul de curbură „media aritmetică a acestor aşa-numite curburi principale”. Mai precis, dacă ne amintim că valorile k_1 şi k_2 desemnau minima şi maxima curburilor secțiunilor normale printr-un punct dat, Sophie Germain propune spre studiu cantitatea $(k_1 + k_2) / 2$. Mai mult, stabileşte în memoriul ei cum anume se distribuie curburile în jurul unui punct pe o suprafață. Rezultatul ei este următorul: „Există, în general, în jurul unui punct dat, patru direcții după care curbele conținute în planele normale sunt similare. În ceea ce priveşte planele principale, numărul curburilor similare se reduce la două”.

În fine, asta ne permite să vedem cum arată aşa-numitele sfere de curbură. E vorba despre acele sfere care ar aproxima cel mai bine suprafața studiată într-un punct dat. Ne-am dori să avem o imagine la fel de intuitivă ca şi figura pe care am obținut-o atunci când am descris cercul de curbură (sau, cum a preferat Leibniz să-l numească, cercul osculator). Abia dacă am avea această interpretare am simți că am făcut, odată cu acest memoriu, un pas

mai departe față de ceea ce ştiam de la Leonhard Euler. Iată şi interpretarea, care nu lipseşte din memoriul publicat de Sophie Germain: „E evident, în fapt, că fiecare dintre curburile principale găsindu-se numai de două ori în conturul întreg al punctului dat şi fiind prin urmare conținute în prelungirea unuia şi aceluiaşi plan, sferele descrise de aceste raze ating, dar nu taie suprafața; în timp ce, reciproc, sferele descrise de razele de valori cuprinse între aceste limite [date de inversele valorilor principale] taie suprafața”.

*

Să considerăm o suprafață în spațiul tridimensional obişnuit. Am văzut că teorema remarcabilă a lui Gauss stabilise faptul că transformările rigide nu schimbă curbura gaussiană. Aşadar, putem spune că există mărimi geometrice care țin de geometria suprafeței, iar nu de cea a spațiului ambient, şi curbura gaussiană este una dintre ele. Mărimile geometrice care sunt aduse pe suprafață din geometria spațiului exterior nu țin de geometria intrinsecă a suprafeței. Terminologia numeşte aceste două categorii de cantități *mărimi intrinseci*, respectiv *extrinseci.* Astfel, curbura gaussiană este intrinsecă, dar curbura medie este

extrinsecă. Nu ne propunem să includem aici argumentul tehnic, dar vom face referință mai departe la acest lucru, în capitolul intitulat „Despre curbură (partea a doua)”.

*

Ne putem imagina spectrul culorilor dispus liniar pe paleta unui pictor, de la stânga la dreapta. Să ne imaginăm culorile aranjate de la cele reci la cele calde. Acum, să ne imaginăm că vrem să reprezentăm obiectele care ne înconjoară într-un grafic care să includă cele două variabile: locul unde se află şi culoarea. De câte dimensiuni avem nevoie ca să reprezentăm asta? Cel puțin de patru. Da, dar noi nu avem la dispoziție decât trei axe de coordonate ca să reprezentăm orice suprafață din spațiul care ne înconjoară.

Acesta e doar un exemplu de situație în care dimensiunile de care avem nevoie pentru a reprezenta complet un fenomen sunt mai multe decât trei. A ne mărgini în studiul geometriei doar la trei dimensiuni ar fi o pierdere. Pentru un studiu complet, avem nevoie să înțelegem toate aceste concepte în dimensiune mai mare decât unu, doi sau trei.

Acest argument, despre reprezentarea spațiului şi a culorilor, se află în lucrarea lui Riemann[38] din 1854 intitulată *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Asupra ipotezelor care se află la baza geometriei*), care a văzut lumina tiparului abia în anul prematurei morți a autorului ei, 1866. Practic, această lucrare este actul de naştere al geometriei diferențiale moderne, cea care avea să constituie suportul teoretic al dezvoltărilor ce au condus atât spre teoria relativității, cât şi spre alte aplicații semnificative în tehnologia contemporană.

Bernhard Riemann (1826-1866) a avut nu doar norocul unei inteligențe neobişnuite, dar şi pe cel al unei educații bine îndrumate. Pare surprinzător că pe atunci Universitatea din Göttingen nu era atât de performantă cum avea să devină câteva decenii mai târziu, la finele secolului al XIX-lea. Gauss preda cursuri elementare şi nu se ştie cum au interacționat cei doi la prima lor întâlnire, cu prilejul unui curs elementar. Riemann avea să se mute la Berlin în 1847, unde a studiat, între alții, cu Dirichlet, Eisenstein, Jacobi şi Steiner. Şi-a obținut doctoratul în

[38] Pentru o versiune românească a acestui text important, vezi aceeaşi pagină a lui Liviu Ornea la care am făcut trimitere şi mai înainte: http://gta.math.unibuc.ro/pages/teachlee.html.

1851, iar în 1854 a susținut conferința *Asupra ipotezelor care se află la baza geometriei*, într-un moment important din cariera lui universitară, atunci când aspira la rangul de *Privatdozent*. Acest rang desemna pe atunci un profesor care nu primeşte salariu fix, fiind plătit din taxele acelor studenți care îi urmează cursul. În această conferință, Riemann a introdus, între altele, două concepte importante: cel de *varietate* şi cel de *curbură secțională*. Nu e nici o exagerare în a spune că ideea de varietate este, de departe, cea mai importantă dintre cele cu ajutorul cărora reprezentăm în geometrie spațiul.

Să ne imaginăm reprezentarea grafică, în patru dimensiuni, a obiectelor din camera noastră, fiecare determinată de cele trei coordonate ale poziției şi de culoare. Acest spațiu, cu mai multe dimensiuni, poate fi înzestrat cu o distanță, pe care Riemann o descrie ca obținută dintr-o generalizare a teoremei lui Pitagora în mai multe dimensiuni. Cu această convenție, putem preciza care e distanța dintre două puncte situate într-un spațiu de dimensiune arbitrară, nu neapărat 4, ci, să zicem, *n*. Astfel, spațiul cu *n* dimensiuni se organizează într-o formă nouă, în care putem calcula distanța şi drumul cel mai scurt care duce de la un punct la altul, dacă un astfel de drum există. Această idee a lui Riemann avea să fie

reexaminată şi completată mai târziu de viitoarele generații de matematicieni; definiția contemporană a varietății (aşa cum se numeşte acest spațiu cu *n* dimeniuni) este formală şi nu ne propunem să o prezentăm aici, unde vrem să punem accent doar pe aspectul intuitiv. Dar ideea originală se află la Riemann: după contribuția sa, geometria va avea la dispoziție un spațiu multidimensional, dotat cu o distanță dată de o formulă generală, pe care multe dintre conceptele puse în evidență pe suprafețe pot fi extinse şi studiate în mod natural.

Cum putem să ne reprezentăm acest spațiu? Pentru început, ni-l vom desena în minte la fel cum desenăm şi suprafețele. Nimic complicat: vedem un covor zburător unduindu-se în mijlocul camerei şi ne imaginăm că pentru o clipă „înghețăm" imaginea. Asta e tot ce avem nevoie pentru intuiția noastră. Cu importanta adăugire că e vorba de un covor de dimensiune *n*, iar *n* nu este neapărat 2.

Cât despre curbură, să observăm că acest covor va avea în fiecare punct, în loc de un plan tangent, un spațiu tangent, un întreg spațiu care la rândul lui are dimensiunea *n.* Analogia e firească: întrucât suprafața are dimensiunea 2, planul tangent într-un punct are

dimensiunea 2; la fel, pentru o varietate de dimensiune *n*, spațiul tangent într-un punct la varietate va avea tot dimensiunea *n.* În cadrul acestui spațiu se află conținute multe plane. În loc de mai vechea curbură gaussiană de pe suprafețe, cea definită prin produsul celor două curburi principale, vom vorbi acum despre *curbura secțională* a unui astfel de plan. Şi vom conveni că valoarea acestei curburi secționale trebuie să coincidă cu valoarea curburii definite de Gauss pentru acea suprafață inclusă în varietate care are planul dat ca plan tangent. Iată cum descrie Riemann acest proces (simplificăm puțin terminologia):

> „Pentru a da un înțeles tangibil curburii unei varietăți într-un punct dat şi într-o direcție planară trecând prin el, vom menționa că o cea mai scurtă curbă (sic!) emanând dintr-un punct e complet determinată dacă direcția inițială este dată. Ca urmare, vom obține o suprafață dacă prelungim toate direcțiile inițiale din punctul dat care sunt tangente la planul ales. Şi această suprafață are o curbură precizată în punctul dat, care e egală cu curbura varietății la punctul dat, în direcția planară aleasă”[39].

[39] Am preluat traducerea acestui fragment de la Liviu Ornea.

Altfel spus, curbura secțională în direcția planară *p* este egală cu curbura gaussiană a suprafeței căreia planul *p* i-ar fi plan tangent.

*

Privită de la mai bine de un veac şi jumătate depărtare, contribuția lui Riemann ni se pare firească, apărută în mod natural, o continuare logică a eforturilor depuse de Rodrigues, Gauss sau Sophie Germain. Dar la vremea respectivă Riemann a avut de înfruntat o oarecare tensiune în mediul academic al vremii sale. Ca să descrie felul cum intuiția noastră ar trebui să perceapă aceste spații foarte generale, el nu polemizează cu filozofii epocii lui sau ai generațiilor precedente, ci alege o cale diplomatică. Va scrie că problema geometriei este de a „căuta cele mai simple date din care relațiile metrice ale spațiului să fie determinate". Iar mai departe precizează că „aceste date sunt, ca orice date, nu necesare, ci doar ipoteze, care se bazează pe o certitudine empirică". Nu merge mai departe cu aceste considerații. Nu caută polemica.

Or, acest punct de vedere este divergent față de cel prezentat de Immanuel Kant (1724-1804) în *Critica rațiunii*

pure, apărută în 1781. Pentru Kant, geometria euclidiană, lumea plată a planului sau a spațiului cu trei dimensiuni, lipsit de curbură, era o necesitate filozofică. Kant scrie că „spațiul nu este o concepție care a fost obținută din experiențe exterioare". Mai mult, „reprezentarea spațiului trebuie să existe deja ca fundație". Nici vorbă aşadar de posibilitatea unor reprezentări abstracte ale unor spații cu *n* dimensiuni, în care să poată fi extins conceptul de distanță sau cel de curbură gaussiană. Mai departe, Kant spune şi că „reprezentarea spațiului nu poate fi împrumutată din relații ale unor fenomene exterioare prin experiență"[40].

Aşadar, existau puncte de vedere importante în filozofia vremii care nu doar că nu anticipaseră deloc această dezvoltare, dar nici nu păreau pregătite să-i netezească intrarea în scenă. După contribuția lui Riemann însă, ideea de curbură a căpătat o formă generală, iar studiul ei a generat geometria riemanniană, care de mai bine de un secol şi jumătate este un interesant domeniu de cercetare.

În toamna lui 2001, atunci când mă pregăteam să particip la prima conferință internațională unde plănuiam

---

[40] O discuție mai detaliată decât cea pe care ne-o propunem aici poate fi găsită în Jeremy Gray, *Plato's Ghost. The Modernist Transformation of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 2008, pp. 78-83.

să vorbesc despre noi invarianți de curbură[41], am avut o discuție cu profesorul David Blair. I-am cerut sfatul asupra unor detalii legate de prezentarea mea. Eram la el în birou, la o oră a după-amiezei când seminarele de geometrie se terminaseră. L-am întrebat cum se poate explica cel mai bine într-un mod cât mai intuitiv ce este curbura secțională. A zâmbit şi mi-a sugerat explicația inițială, cea moştenită de la Riemann. Am folosit explicația aceasta de mai multe ori, chiar şi în situații când am prezentat astfel de idei unui public în rândurile căruia nu se afla nimeni familiarizat cu geometria diferențială.

Gheorghe Țițeica

În toamna lui 1896, când Gheorghe Țițeica avea doar 23 de ani, a ajuns la Paris cu o bursă românească de merit, iar întâlnirea lui cu Gaston Darboux trebuie să fi fost acel eveniment unic care poate schimba o viață. Programul de doctorat al lui Țițeica avea să dureze trei ani şi să se desfăşoare sub îndrumarea lui Darboux, ale cărui lucrări la ora aceea se bucurau de recunoaştere internațională. Gaston Darboux a fost geometru, a îndeplinit între altele şi funcția de decan al Facultății de

[41] Avea să fie la Toronto, pe 9 decembrie 2001.

Ştiinţe şi, între multe alte contribuţii, a scris o lucrare în patru volume intitulată *Théorie générale des surfaces*, al cărei ultim volum abia venise de la tipar în toamna când Ţiţeica a ajuns la Paris. Pentru multă vreme, tratatul lui Darboux a fost una dintre referinţele principale în domeniul geometriei. Pentru tânărul student român trebuie să fi fost o descoperire de graţie. Îi era clar că se află în centrul universitar al lumii, în laboratorul în care se nasc ideile cele mai temerare ale momentului.

Din perioada aceea circulă despre Darboux mai multe istorii. Se spune[42] că topologul danez Poul Heegaard (1871-1948) a venit în vizită la Paris, după ce a absolvit facultatea la Universitatea din Copenhaga în 1893, înarmat cu o scrisoare de prezentare către Darboux. Heegaard a aşteptat în anticameră vreme de patruzeci şi cinci de minute, după care secretara i-a comunicat că domnul profesor Darboux a mototolit scrisoarea de recomandare şi a aruncat-o direct în coşul de gunoi. Astfel, aşteptarea nu mai avea sens: oaspetele danez a plecat fără a schimba nici un cuvânt cu Darboux. Heegaard a avut parte de o primire mult mai binevoitoare

[42] Episodul e povestit de George Szpiro în *Poincaré's Prize: The Hundred-Year Quest to Solve One of Math's Greatest Puzzles*, Plume, New York, 2008.

din partea lui Felix Klein în Germania, iar peste câțiva ani avea să confirme, producând rezultate de interes în topologie.

Simplul fapt de a fi fost acceptat şi confirmat în cercul studenților lui Darboux era o performanță în sine. Teza lui Țițeica nu a fost decât un prim pas într-o carieră de maximă creativitate în cercetare. Nu cred că ar fi o afirmație hazardată dacă aş spune că Țițeica a fost primul cercetător autentic produs de şcoala de la Bucureşti, un matematician care a rămas activ toată viața în domeniul său de cercetare.

Rolul pe care îl joacă sferele nu se opreşte la aproximarea curburii pe suprafață. Ar merita povestit aici felul în care a apărut acel domeniu al geometriei numit *geometrie diferențială afină.* Descoperirea a avut loc la Bucureşti, în primăvara care a precedat răscoalele din 1907. După ce a devenit profesor plin la Universitate, în 1903, Gheorghe Țițeica a avut o perioadă de cercetare extrem de fertilă, care a durat mai bine de un deceniu. A publicat o serie de articole importante între 1906 şi 1916 în cele mai prestigioase reviste ştiințifice ale vremii, aşa cum erau *Comptes Rendus* şi *Rendiconti.* Țițeica avea 33 de ani atunci când prima lui lucrare despre legătura dintre curbură şi transformările liniare a apărut la Paris.

Dacă în ceea ce priveşte prestigiul unei reviste cum este *Comptes Rendus*, a Academiei de Ştiințe din Paris, nu e nevoie să insistăm prea mult, ar trebui spus că *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* fusese fondată în 1884 de matematicianul Giovanni Guccia (1855-1914), fiul unei importante familii siciliene foarte bogate, înrudită cu nobilimea din sudul Italiei. Giovanni Guccia şi-a susținut doctoratul sub conducerea lui Luigi Cremona (1830-1903) la Roma şi şi-ar fi dorit să introducă Palermo în circuitul academic mondial. În acest sens, a dotat Cercul Matematic cu un loc de întâlnire, o bibliotecă şi i-a pus la dispoziție finanțarea necesară. Aceste intenții au atras colaborări valoroase, astfel încât lucrări de importanță crucială pentru matematica de la finele secolului al XIX-lea şi începutul veacului următor au apărut în *Rendiconti.* Între altele, *Complément à l'analysis situs*, lucrare publicată în această revistă de Poincaré în 1899, sau ultima lucrare a lui Poincaré apărută în 1912 tot în *Rendiconti*, intitulată simplu *Sur un théorème de géométrie*, un studiu care a dat naştere unor cercetări cu consecințe importante până în vremurile noastre[43].

[43] Celebra conjectură a lui Poincaré a fost demonstrată de Grigori Iakovlevici Perelman într-o lucrare făcută publică în noiembrie 2002.

Țițeica şi-a început discuția lui despre aşa-numitul invariant afin (pe care îl vom descrie aici) subliniind că e interesat de acele suprafețe a căror curbură într-un punct *P* e proporțională cu puterea a patra a distanței de la originea axelor de coordonate la planul tangent dus la suprafață în *P*, distanță notată cu *d.* El a numit suprafețe de clasă *S* toate acele suprafețe care satisfac această proprietate, mai precis egalitatea $K = o\ constantă \times d^4$.

Şi acum surpriza. Țițeica studia efectul pe care îl au transformările liniare asupra spațiului cu trei dimensiuni. În calcule, el urmărea ce se întâmplă cu formula suprafeței atunci când vectorul de poziție al unui punct mobil de pe suprafață este înmulțit cu o matrice pătratică de dimensiune trei pe trei. Rezultatul pe care Țițeica îl comunica în 1907 Academiei din Paris era următorul: Dacă o transformare liniară care păstrează fix atât punctul *O*, cât şi infinitul este aplicată ecuației unei suprafețe de tip *S*, atunci se obține tot o suprafață de tip *S*, având centrul tot în *O.*

Intuiția lui Țițeica a fost extraordinară. Câte tatonări să fi făcut până a ajuns la studiul proporționalității dintre curbura gaussiană şi distanța *d*? Lucrarea lui din 1907 se încheie cu rezultatul principal: O transformare liniară care nu schimbă nici planul de la infinit, nici originea lasă

neschimbat raportul dintre curbura gaussiană a suprafeței şi d^4.

Importanța acestui rezultat este următoarea: există o legătură profundă între curbura gaussiană şi unele categorii de deformări ale suprafețelor, mai precis cele descrise de transformări liniare, adică de cele care se pot reprezenta prin matrice.

Atunci când a studiat aceste lucruri, Țițeica ştia că urmează una dintre direcțiile de cercetare descrise de Felix Klein în 1872 în aşa-numitul *Program de la Erlangen*. Klein enunțase o problemă foarte generală: „Să se studieze cum anume transformările spațiului, aşa cum sunt cele reprezentate de matricele pătratice trei pe trei, influențează geometria, figurile şi ce cantități anume rămân neschimbate atunci când aplicăm aceste transformări". Chiar aşa, ce legătură ne-am fi aşteptat să fie între curbură şi deformările exprimate prin matrice pătratice? La prima vedere, n-ar trebui să aibă de-a face una cu celelalte. Dar iată că există o legătură, care nu e deloc evidentă.

Descoperirea acestei legături este marele merit al lui Gheorghe Țițeica. Fiind elev în şcoala elementară, îi întâlnisem numele fie în legătură cu problema celor trei cercuri, fie atunci când era vorba despre culegerea sa de

probleme. Dar adevărata importanță a cercetărilor lui depăşeşte ceea ce se povesteşte în şcoala elementară[44].

Povestea lui Sebastian Kaufmann şi a *Gazetei matematice* de acum un veac

La finele veacului al XIX-lea a existat pentru o vreme tendința ca unii specialişti să-şi obțină un doctorat de excelentă calitate în Vest şi apoi, odată întorşi în România, să nu-şi mai continue cercetările, ca şi cum lumea românească nu i-ar fi motivat în acest sens. Poate cel mai elocvent exemplu e Spiru Haret, care din cercetător de elită în domeniul mecanicii cereşti a devenit un excelent administrator al învățământului, ceea ce probabil că nu este puțin lucru, dacă ne gândim ce moştenire importantă a lăsat şcolii româneşti. O altă categorie interesantă sunt tinerii care promit mult, dar care nu devin totuşi nici universitari, nici cercetători, deşi au dat la o vârstă fragedă dovezi ale talentului şi inspirației. În acest sens, şi istoriile din linia a doua a unei culturi sunt relevante. Pe

[44] Am studiat lucrările originale atunci când am scris, alături de trei colegi, lucrarea: Alfonso F. Agnew, Alexandru Bobe, Wladimir G. Boskoff, Bogdan D. Suceavă, „Gheorghe Țițeica and the origins of affine differential geometry”, *Historia Mathematica*, Elsevier (Science Direct), vol. 36, nr. 2, mai 2009, pp. 161-170.

de altă parte, interesul unor autori pentru anumite probleme ştiinţifice dintr-un anumit moment istoric poate da măsura profunzimii reflecţiei dintr-un spaţiu cultural în perioada respectivă, dar şi măsura felului cum era motivat şi folosit talentul autentic. Matematica e în acest sens o bună măsură: momente autentice ale creaţiei matematice se pot vedea şi la elevi de liceu, bunăoară. Faptul că m-am întâlnit cu povestea pe care o voi aminti aici nu e deloc întâmplător. Am descoperit că o anumită problemă elementară de geometria curbelor din plan fusese abordată într-un mod foarte pragmatic cu aproape un veac în urmă într-un articol publicat în *Gazeta matematică*. Istoria aceasta merită evocarea unui întreg regat al umbrelor, şi nu voi ezita să o fac aici.

Faptele pe care le vom rememora se petreceau în epoca în care Gheorghe Ţiţeica, revenit de mai bine de un deceniu în România după ce şi-a susţinut teza de doctorat sub conducerea lui Gaston Darboux, descoperea conceptele care stau la baza geometriei diferenţiale afine. Ţiţeica a reprezentat în Vechiul Regat primul model al unui profesor realizat atât în perioada studiilor pariziene, cât şi în cariera care le-a urmat, odată întors în ţară.

Ţiţeica nu a fost doar un cercetător de elită, ci şi un educator sincer interesat de soliditatea şcolii româneşti de

matematică. Grija cu care coordona organizarea Concursului *Gazetei matematice* o dovedeşte. Pe vremea aceea, între altele, Ţiţeica scria rapoartele anuale asupra Concursului şi a decernării premiilor, iar acestea erau publicate ca editoriale în *Gazetă*. De exemplu, cea de-a zecea ediţie a Concursului Societăţii *Gazeta matematică* e consemnată în numărul 9 din 1910 al revistei, a cărei arhivă editată de Softwin poate fi consultată pentru majoritatea detaliilor pe care le vom aminti aici. Între cei cărora Societatea le adresează mulţumiri pentru susţinerea ediţiei din 1910 a Concursului se află şi B. Delavrancea, pe atunci ministru al Lucrărilor Publice, „pentru înlesnirea biletelor de drum pentru ducerea şi întoarcerea candidaţilor din provincie". Articolul ne dă informaţii şi asupra fenomenului: s-au înscris în competiţie 75 de candidaţi din întreaga ţară, dintre care au fost aleşi, „potrivit activităţii lor la *Gazetă*", 36. Victoria în competiţie, pe vremea aceea, nu era un lucru uşor: Concursul *Gazetei matematice* avea atât probă scrisă, care consta în mai multe „teze", cât şi orală. În 1910 avea să câştige C. Mititelu, elev în clasa a VII-a la Liceul „Gh. Roşca Codreanu" din Bârlad. Un an mai târziu, în numărul 9 din 1911 al *Gazetei matematice*, sunt din nou adresate mulţumiri lui B. Delavrancea pentru aceleaşi

înlesniri ale călătoriilor, precum şi dlui C. Mironescu, directorul Şcolii de Poduri şi Şosele, pentru sala unde s-au ținut lucrările scrise, dar şi lui E.A. Pangrati, noul ministru al Lucrărilor Publice, care, în calitate de rector al Universității Bucureşti, a pus la dispoziție sala unde s-au susținut probele orale. Câştigătorul din 1911 a fost Dan Barbilian, elev în clasa a VI-a la Liceul „Gh. Lazăr", despre care editorialul *Gazetei* consemnează „că a îndeplinit condițiunile pe care le cerem noi pentru această deosebită cinste". Patruzeci de ani mai târziu, în unul dintre textele publicate într-un volum din *Pagini inedite*, Barbilian scria despre concursul pe care l-a câştigat: „Ce voi fi scris în teză? Aprecierea lui Țițeica («foarte bună teză de algebră») m-a mirat. Să fi ieşit eu la mal, din atâtea calcule numerice? Dacă detaliul tezei îmi scapă, atmosfera acelei săli prăfuite (a Şcolii de Poduri) şi a după-amiezei aproape nordice, cu lumină polarizată, o regăsesc. Teza de geometrie, trecută dimineața, o resimt şi astăzi ca un moment trăit. Teza de algebră rămâne, oarecum, hipnotică".

Un an mai târziu, referindu-se la contextul politic care a precedat războaiele balcanice, în numărul 10 din 1912, Gheorghe Țițeica scria: „Anul acesta a fost un an greu

pentru țara întreagă, prin urmare şi pentru *Gazeta matematică*. Preocupările tuturor au fost îndreptate mai mult asupra furtunii care ne amenință, încât cu greu s-a mai putut da şi pentru *Gazetă* prinosul de muncă cu care ne obicinuisem". Pentru a descrie parte dintre dificultăți, Țițeica menționează că în ediția din 1912 a Concursului nu a fost nici un participant din Iaşi, de unde veneau de obicei concurenți care se clasau pe locurile fruntaşe. Avea să se situeze pe primul loc Cristea Mateescu, elev în clasa a VIII-a la Liceul „B.P. Hasdeu" din Buzău, urmat de G. Negreanu, din clasa a VI-a a Liceului „Mihai Viteazul" din Bucureşti. Tot în anul acela, poziția a cincea avea să fie ocupată de Şerban Gheorghiu, pe atunci elev în clasa a VI-a la Liceul „Mihai Viteazul" din Bucureşti. Pentru cititorii corespondenței lui Dan Barbilian, numele acesta spune ceva: Şerban Gheorghiu e unul dintre contemporanii cu care Barbilian comunica cel mai deschis, adresându-şi acestuia scrisorile ca unui egal redutabil. A treisprezecea ediție a Concursului, când Şerban Gheorghiu a ieşit pe locul doi, mai consemnează o apariție interesantă: pe locul şase comisia de concurs îl clasează pe Sebastian Kaufmann, elev în clasa a V-a la liceul din Focşani, despre care se notează astfel în raportul de concurs: „are calități reale, pe care le-a arătat la probleme scrise. Proba scrisă

de aritmetică a fost excelentă şi a dovedit că dl Kaufmann are spirit aritmetic, ceea ce e rar, mai ales în clasa a V-a. Oralul n'a prea fost la aceiaşi înălțime". După cum se vede, profesorul Țițeica nu era un fervent practicant al politeții în defavoarea francheții, iar unele dintre observațiile lui ar putea contraria cititorul de azi prin aura lor abruptă: „Din clasa a V-a, în afară de dl Kaufmann, înscris în lista premianților, nici unul dintre ceilalți 5 candidați nu merită nici o mențiune, din cauza răspunsurilor prea slabe".

În numărul 9 din 1914, Gh. Țițeica scrie:

> „Astă toamnă, către sfârşitul lui Octomvrie, pe când se discutau în şedința *Gazetei* condițiunile concursului, care, ca de obicei, trebuiau anunțate în numărul de pe Noemvrie, cea mai mare parte dintre membrii Societății eram convinşi că, de data asta, din cauza evenimentelor, concursul nu va putea să aibă loc. Şi cu toate acestea, cu toată atmosfera grea, cu toată nesiguranța zilei de mâine, concursul s'a anunțat, înscrierile s'au făcut şi diferitele lui probe s'au ținut".

În anul acela avea să câştige Al. Pantazi, elev în clasa a VIII-a la liceul din Piatra-Neamț. Sebastian Kaufmann a ieşit pe locul patru, şi „a făcut două probe scrise, de

algebră şi de geometrie, foarte bune sub toate raporturile. Păcat că oralul n'a fost la aceiaş înălțime". E clar din aceste însemnări că exista o creştere calitativă în abilitățile tânărului matematician.

Ultimul Concurs al *Gazetei* din perioada aceea s-a ținut în 1915, după care această activitate remarcabilă avea să sufere o întrerupere de cinci ani: următorul Concurs al *Gazetei* va avea loc abia în 1920. Atunci însă, în 1915, se pare că a fost o ediție de foarte bună calitate a Concursului. Pe primul loc s-a clasat Radu Augustin, de la Liceul „Gh. Lazăr" din Capitală, urmat de I. Suchăr, de la Liceul „Matei Basarab". Sebastian Kaufmann a ieşit pe locul al treilea. Despre el, Gheorghe Țițeica scrie în raportul despre concurs publicat în *Gazetă* că „e cel mai iscusit dintre corespondenții actuali ai *Gazetei*. Multe dintre problemele propuse, grele şi delicate, au fost descurcate de dânsul, încât eram aproape siguri că va fi în fruntea listei. Din nefericire lucrarea scrisă de trigonometrie lasă de dorit şi unele răspunsuri orale n'au avut siguranța la care ne aşteptam. De aceea l'am lăsat în locul al treilea".

Prima problemă propusă sub semnătura lui Sebastian Kaufmann apare în *Gazeta matematică* în numărul 10 din 1913, când autorul ei avea probabil în jur de 15 ani. E o

problemă de teoria numerelor. Avea să publice alte cinci probleme în 1914, ceea ce justifică observația lui Gheorghe Țițeica despre calitatea contribuțiilor lui la *Gazetă*. Au fost cu totul 17 probleme propuse, într-un interval de treisprezece ani. S. Kaufmann avea să scrie în total patru articole, plus câteva note. Unul dintre articole e cu totul deosebit. Mai există lucrări extraordinare scrise de liceeni, dar acesta merită numai el o poveste. Textul se intitulează „Asupra unor curbe algebrice" şi e publicat în numărul 6 din 1916 al *Gazetei matematice*, probabil nu departe de momentul când autorul articolului îşi încheia studiile liceale. În această lucrare, Sebastian Kaufmann consideră o curbă algebrică de grad arbitrar şi îşi pune problema caracterizării acelor curbe pentru care proprietatea puterii punctului se păstrează, în analogie cu proprietatea similară care e adevărată pentru cercurile din planul euclidian. Pentru acest studiu şi pentru a caracteriza respectiva clasă de curbe, el foloseşte coordonate polare şi un calcul trigonometric inteligent. (Se pare că trigonometria devenise între timp punctul său forte, ceea ce sugerează că însemnările din editorialul lui Țițeica l-au motivat să studieze tot mai mult.) Şi iată partea interesantă a istoriei. Din câte am reuşit să aflu, aceeaşi problemă elementară avea să fie studiată în alte

publicații mult mai târziu, mai precis de către E.H. Neville, în articolul „The power of a point for a curve”, apărut în revista britanică *The Mathematical Gazette* abia în 1956. În 1963, A. Loeffler a publicat articolul „Sur la puissance d’un point par rapport à une conique”, în *Elemente der Mathematik*. Chiar şi după aceste articole, ai căror autori nu cunoşteau articolul lui Kaufmann şi care, în consecință, nu îl citează, ni se pare că lucrarea din 1916 îşi păstrează originalitatea şi caracterul interesant. Şi de ce ar fi acest detaliu important? – s-ar putea întreba cineva. Mie mi se pare extraordinar că un licean din România războaielor balcanice, din scurtul interval de timp dintre aceste conflicte militare şi Primul Război Mondial, şi-a propus studiul unei asemenea probleme şi că lucrarea i-a apărut în revista la al cărei concurs el a participat de trei ori. Detaliul acesta dă măsura atmosferei intelectuale a momentului. Din păcate, cred că nici una dintre celelalte contribuții ale lui Sebastian Kaufmann nu se apropie în profunzime de acel rezultat obținut de autor la 18 ani. De fapt, nu ştiu mai multe despre Sebastian Kaufmann. E uşor de descoperit că între 1919 şi 1926 nu a mai colaborat la *Gazeta matematică*. În 1926, a mai trimis două probleme propuse, dar acestea sunt mai degrabă de nivel mediu şi parcă nu mai păstrează nimic

din strălucirea de odinioară a autorului. După acest moment, baza de date a *Gazetei* nu mai consemnează nimic despre el.

*

Împreună cu Mihaela Vâjiac şi Adrian Vâjiac[45] am scris lucrarea *The power of a point for some real algebraic curves*, în care am continuat studiul inițiat de teorema lui S. Kaufmann, reaşezând totodată cronologia în ordinea ei reală. Lucrarea noastră a apărut în martie 2008 în revista britanică *The Mathematical Gazette*. A fost o experiență interesantă să explorăm atmosfera extraordinară a epocii, acel mediu neobişnuit de comunicare şi travaliu de acum un secol, precum şi fertila atmosferă creată în jurul *Gazetei matematice* la începutul secolului XX.

[45] Ambii de la Universitatea Chapman, din Orange, California. Amândoi au urmat la Universitatea din Bucureşti cursul opțional de *Capitole speciale în teoria relativității* cu profesorul Stere Ianuş în anul universitar 1992-1993, pe care l-am rememorat mai înainte. Şi acesta nu este singurul teren comun care ne reuneşte interesele de cercetare.

De la *Programul de la Erlangen*, al lui Felix Klein, la poemele lui Ion Barbu din *Joc secund*

Multă vreme nu am înțeles adevărata importanță a contribuțiilor în matematică ale lui Gheorghe Țițeica şi Dan Barbilian, şi nu am înțeles aşa cum mi-aş fi dorit nici legătura dintre cercetarea lor matematică şi poemele din *Joc secund*, volumul semnat de Ion Barbu şi apărut în 1930. Am întâlnit pentru prima oară definiția suprafețelor Țițeica pe când eram student, în anul II, la Facultatea de Matematică a Universității din Bucureşti. Aşa cum ne era prezentată la curs, definiția respectivă era doar o caracterizare metrică, lipsită de semnificația ei originară, cea care ilumina ideile în contextul grupurilor de transformări. În acel concept, introdus de Țițeica în 1907, într-o lucrare mult citată, apărută în *Comptes Rendus*, la Paris, se afla codificată o întreagă viziune a unei epoci, era surprins spiritul momentului. Cât am fost student, în cei şase ani pe care i-am petrecut la Bucureşti, nu am întâlnit niciodată la curs vreun studiu pe textul originar al lucrărilor lui Țițeica sau Barbilian, şi nici vreo mențiune a *Programului de la Erlangen*, eseul lui Felix Klein din 1872, a cărui influență avea să schimbe felul în care s-a

structurat geometria de atunci şi până azi. M-ar fi interesat enorm întrepătrunderea dintre acea construcție teoretică şi cultura română. Cine ar fi crezut că acele idei pot să devină, grație lui Barbilian, sursa de inspirație a unei poetici? De fapt, Barbilian a explicat aceste lucruri cu asupra de măsură, dar pentru multă vreme nimeni nu a înțeles acele explicații. Aceste concepte nu au fost discutate în vremea studenției mele nici la cursul de filozofia ştiinței, nici în vreunul dintre cursurile de nivel superior de geometrie (şi le-am urmat pe toate). La o distanță de două generații, Universitatea din Bucureşti îşi pierduse tradiția şi, cel puțin la Facultatea de Matematică, a fost nevoie de un oarecare efort ca să recuperez unele informații.

În 2005, am avut şansa să revin la aceste idei şi să încerc să le înțeleg. Nu-mi doream nimic mai mult decât o decriptare competentă. Şansa s-a ivit sub forma unei invitații din partea lui Wladimir Boskoff de a lucra alături de el într-un proiect care aparține domeniului geometriei metrice. De atunci, după ce am scris peste douăzeci de articole de matematică împreună (nu toate pe această temă), Wladimir Boskoff îmi pare a fi nu doar un coautor ideal, ci şi, prin profunzimea ideilor matematice cu care a lucrat multă vreme, un cercetător redutabil. Mi-a plăcut

enorm încăpățânarea cu care a urmărit vreme de mai bine de două decenii idei pe care alți matematicieni nici nu le-au înțeles, nici nu le-au abordat cu rigoarea necesară. Cu atât mai mult mi-am dorit să înțeleg, să decriptez, să reconstitui un ambient de idei şi de viziune din vechea perioadă când domenii disjuncte se puteau întâlni. Nu era vorba doar de aspectul matematic, pur tehnic, ci de ceva mai mult, de o întreagă paradigmă, *felul cum gândea Barbilian în perioada 1928-1929, când s-au scris poemele din* Joc secund*.* Pe lângă aceasta, am vrut să înțeleg de unde provin momentele de succes ale trecutului, cele de la Universitatea Bucureşti, dintr-o perioadă când Țițeica era enumerat printre cei mai abili geometri ai momentului de către L.P. Eisenhart sau când Barbilian era un partener egal de discuții al lui Wilhelm Blaschke (în decembrie 1934, Barbilian a susținut o conferință la Bucureşti în care a prezentat rezultate obținute în colaborare cu Blaschke; din acel proiect nu a rezultat o publicație, dar ştim cu certitudine că intenția şi dialogul au existat). Şi, mai cu seamă, ceea ce îmi doream cel mai mult era să pricep: care era legătura cu literatura? Simplul fapt că putem adresa o asemenea întrebare e ceva care merită detaliat.

Cred că subiecte ca acesta nu pot fi abordate decât dacă viziunea noastră e dublată de multă modestie. E necesară o deschidere către mai multe domenii, în felul viziunii pe care şcoala cea veche o forma, dar pe care timpurile recente nu o mai egalează. Îmi e greu să cred că în vremurile noastre mai există viziuni care să cuprindă totodată dimensiunea filozofică a Programului de la Erlangen, aspecte de teorie literară, noțiuni de fundamentele geometriei, analiză complexă şi geometrie metrică. Iar Barbilian le vedea pe toate, nu am nici o îndoială asupra acestui lucru, cu un nivel de competență şi creativitate pe care azi nu mai ştiu cine l-ar putea avea. Faptul că secolul trecut ne-a lăsat creații a căror semnificație poate fi apreciată doar având în vedere dezvoltarea sincronă a unor domenii este cu atât mai remarcabil şi mai ieşit din comun. Suntem norocoşi că o asemenea placă turnantă a existat în câmpul culturii române şi că o putem contempla în original, şi încă sub semnul unei atât de savuroase culori locale. Putem aşadar încerca să înțelegem, urmând ordinea istorică a unor fapte.

Până acum câțiva ani, nu îmi propusesem să studiez aspectele matematice ale operei lui Dan Barbilian. În primăvara anului 2001, când eram student la Michigan

State University şi principala mea preocupare era domeniul inegalităților geometrice, Wladimir Boskoff a fost invitat la East Lansing să facă o prezentare despre spațiile Barbilian în cadrul seminarului de geometrie diferențială coordonat pe atunci de profesorul David E. Blair[46]. Prezentarea lui Wladimir Boskoff a avut o capacitate de sinteză şi o viziune culturală care mi-au trezit interesul. După seminar am discutat cu fostul meu profesor de topologie, John D. McCarthy, care mi-a tradus în limbaj modern câteva dintre posibilele dezvoltări ale problemelor firesc ridicate de cercetarea rămasă moştenire de la Barbilian. Atunci am realizat că mă aflu în vecinătatea unei mine de aur, unde se pot obține rezultate noi şi unde se poate înțelege foarte mult. Sub îndrumarea lui Wladimir Boskoff, am încercat să citesc unele dintre textele matematice ale lui Barbilian, care s-au dovedit extrem de dificile. Îi sunt profund îndatorat lui Wladimir Boskoff pentru că a păstrat aceste texte încă lizibile. Căci Barbilian scrie matematică fără milă față de cititor, iar unele pagini de geometrie sunt mai criptice decât poemele sale. Înăuntru însă, diamantele sunt la locul lor. Astăzi

[46] Autor, între altele, al mult citatei monografii *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, apărută la Birkhäuser, Boston, în 2001.

sunt convins că e vorba despre cea mai fundamentală contribuție în matematici realizată de un cercetător format într-o universitate românească. Ideea aşa-numitelor spații Barbilian e de o generalitate şi de o profunzime atât de impresionantă, încât şi la decenii distanță impresionează prin temeritate[47]. Am făcut o primă prezentare despre spațiile Barbilian pe 17 aprilie 2005, în cadrul conferinței secțiunii de Vest a American Mathematical Society, la Santa Barbara. Pe 19 ianuarie 2006 am prezentat, la Michigan State University, în seminarul de geometrie diferențială, câteva noi rezultate despre spațiile Barbilian, prilej de a discuta din nou despre subiect cu profesorii David Blair şi John McCarthy[48].

---

[47] Am scris până acum mai multe lucrări despre spațiile Barbilian, care au apărut în *Houston Journal of Mathematics*, *Historia Mathematica*, *Czechoslovak Mathematical Journal*, *Differential Geometry and Its Applications*, între altele. Toate aceste lucrări, în afară de una singură, sunt realizate împreună cu Wladimir Boskoff şi unii dintre colaboratorii lui de la Universitatea Ovidius din Constanța. Am povestit istoria acestor idei într-un articol amplu, apărut în nr. 286 din 15-21 septembrie 2005 al *Observatorului cultural.*

[48] Am început să prezint aceste idei în România în noiembrie 2006, prima oară într-o conferință la Facultatea de Litere a Universității din Piteşti. Am prezentat apoi conferințe pe această temă în mai 2007 la universitățile din Constanța, Cluj-Napoca şi Oradea.

*

Nu mi-am propus o interpretare a poeziei lui Ion Barbu. Există asupra acestui subiect mai multe exegeze a căror misiune e bine îndeplinită. Ceea ce ne propunem e cu totul altceva: *reconstituirea*, în context literar, a universului de idei inspirate din matematică şi eventual din filozofia ştiinţei care au permis, în perioada 1928-1929, scrierea formei definitive a poemelor din volumul *Joc secund.* O operaţiune de reconstituire a unui context cultural e altceva decât interpretarea, dar şi decât istoria literară sau simpla istorie a matematicii. Aici, lucrurile trebuie redate în integralitatea lor şi conexiunile culturale trebuie făcute.

Mai mult, dacă izbutim să decriptăm acest ambient de idei, *atunci reuşim să punem în evidenţă una dintre importantele surse de inspiraţie ale modernismului românesc.*

Această argumentaţie nu putea fi expusă mai devreme, chiar dacă faptele despre care va fi vorba aici s-au petrecut demult. Motivul ţine de dezvoltarea temei în matematică: numai foarte recent au fost înţelese de către cercetători anumite punţi de legătură. De exemplu, faptul că procedura de metrizare a lui Barbilian are un caracter unificator în geometrie apare prima oară într-unul dintre

articolele scrise de Wladimir Boskoff şi de mine, dintre cele amintite mai sus.

Şi mai e ceva. Idei aparent disparate au avut în anii douăzeci ai veacului trecut un trunchi comun. Apoi, între domenii a apărut o frontieră greu de trecut. Viziunea universală din prima jumătate a veacului douăzeci se recompune azi numai cu semnificative eforturi. Şi abia acum putem spune: procedura de metrizare a lui Barbilian este o idee tehnică de maxim interes, perfect sincronă vremii sale, anilor treizeci ai secolului trecut, când apăreau primele elemente din dezvoltarea geometriei metrice.

Una dintre concluziile la care am ajuns pe parcursul studiului nostru a fost aceea că unul dintre cele mai neaşteptate izvoare ale literaturii moderne române îşi are originile în evoluția ideilor din câmpul geometriei din a doua jumătate a veacului al XIX-lea, în paradigma deschisă de Sophus Lie, Gaston Darboux şi Felix Klein, odată cu interacțiunea lor din perioada 1869-1872. Barbilian o spusese de câteva ori, dar abia acum vedem adâncimea afirmației: şi poemele din *Joc secund* sunt parte a construcției. Oricât de paradoxală ar fi o asemenea afirmație, la o atentă analiză a istoriei ideilor vom descoperi că grație acestei filiații ne aflăm în prezența unei

poetici spectaculoase. Simpla conexiune dintre cercetarea fundamentală dintr-un domeniu oarecare, în cazul de față geometria, şi literatură e suficientă pentru a ne atrage atenția. Dar acum e vorba de mai mult decât atât: putem descrie apariția şi consecințele unei construcții care a avut două expresii. Una dintre ele sunt poemele din *Joc secund*, semnate de Ion Barbu. Cea de a doua o reprezintă cercetarea lui Dan Barbilian asupra oscilației logaritmice (pentru a clarifica terminologia, vom spune că formula oscilației logaritmice dă aşa-numita procedură de metrizare a lui Barbilian). Conexiunea aceasta a fost posibilă în intervalul mai larg de timp dintre 1927 şi 1935. Această legătură profundă nu a fost rodul hazardului, ci e în mod natural îndatorată unor evoluții din spațiul ideilor ajunse la maturitate în perioada interbelică. Atunci viziunea integratoare a Programului de la Erlangen ajunsese la apogeu.

Nu ne propunem să facem aici întreaga istorie a acestui fenomen. O descriere completă ar trebui să treacă printr-o bună componentă a istoriei matematicii, în special a istoriei geometriei. Pentru a aşeza într-un context potrivit această tematică, ar trebui să cuprindem în ansamblul ideilor geometrice contribuțiile revoluționare datorate lui Bernhard Riemann, Sophus Lie, Gaston Darboux, Felix

Klein şi David Hilbert. O explicație completă ar trebui să includă impactul pe care *Programul de la Erlangen* al lui Felix Klein l-a avut asupra universului de idei de la Universitatea Bucureşti de la finele veacului al XIX-lea şi începutul secolului XX, cel puțin până la 1921, când Barbilian şi-a susținut licența. Apoi ar trebui să urmărim ideile pe care Barbilian le-a asimilat în cursurile pe care le-a frecventat la Göttingen între toamna anului 1921 şi 1924. La capătul acestei descrieri ne devine accesibilă ambianța ideatică ce a pregătit terenul pentru construcția dual reprezentată de poemele din *Joc secund* şi de oscilația logaritmică. La o analiză atentă, aceste două laturi ale creației unui singur cercetător nu pot fi despărțite. Ce a izbutit matematic în una dintre ele a exprimat poetic în cealaltă.

*

Volumul *Joc secund* a inaugurat în 1930 colecția „Biblioteca portativă" a Editurii Cultura Națională, în editarea lui Alexandru Rosetti. Aşa cum a apărut inițial, volumul e împărțit în cicluri. Primul dintre aceste cicluri cuprinde cinci poeme: primul dintre ele nu are titlu şi e preluat în alte ediții ulterioare fie sub titlul *Joc secund*, fie

sub un titlu marcat prin semnul ***, iar următoarele sunt *Timbru*, *Grup*, *Înecatul* şi *Orbire.*

Organizarea acestui prim ciclu nu e întâmplătoare. La baza acestor poeme se află o temă comună, foarte bine descrisă în *Timbru* de cea de-a doua strofă: „Ar trebui un cântec încăpător, precum/ Foşnirea mătăsoasă a mărilor cu sare;/ Ori lauda grădinii de îngeri, când răsare/ Din coasta bărbătească al Evei trunchi de fum”. Aceste versuri propun o temă oarecum aparte în poezia românească din epocă, o temă pe care o vom numi *tema cântecului încăpător.* Ele merg în acelaşi sens cu pasajul „Poetul ridică însumarea/ De harfe răsfirate ce-n zbor invers le pierzi/ Şi cântec istoveşte [...]” (*Joc secund*), dar şi cu versul mult sintetizat: „Găsi-vor gest închis, să le rezume” (*Grup*), sau: „Atlanticei sunt robul vibrat spre un mărgean” (din poemul *Înecatul*).

Toate aceste pasaje marchează tendința unei căutări, a reducerii la esențe, o întoarcere la principii fundamentale „ce-n zbor invers le pierzi”. Acest principiu fundamental este „gestul închis”, menit „să rezume”. Ar fi greu să înțelegem aceste texte fără a încerca să descriem aici viziunea celor care au făcut cercetare în fundamentele geometriei în prima jumătate a secolului XX. Pe atunci, influența lui David Hilbert era dominantă, iar Barbilian a

urmat cursurile lui Hilbert (în toamna lui 1921), şi nu în mod întâmplător: s-a dus la Göttingen special pentru asta. Pentru cineva care a trecut prin experiența axiomaticii, era imposibil ca acest lucru să nu lase urme. În ce fel? Şi are oare această experiență de-a face cu arhitectura poemelor din *Joc secund*? Motivul dominant al cântecului încăpător ne sugerează că da.

Întoarcerea la principiile fundamentale are un echivalent în fundamentele geometriei: analiza axiomatică, analiza inversă. Victor Pambuccian descrie astfel acest tip de raționament[49]: „Atunci când conjecturăm o teoremă în geometrie, încercăm întâi să o demonstrăm cu orice mijloace avem la dispoziție. După ce îi stabilim adevărul, putem să urmărim o analiză inversă [în original: *reverse analysis*], prima oară descrisă de Pappus din Alexandria drept *analiză*, şi putem să ne întrebăm nu dacă teorema este adevărată, ci ce avem nevoie să presupunem pentru a ne asigura că ea este adevărată". E inevitabil ca această descriere să nu ni se prezinte ca o analogie la „zborul invers" din poemul *Joc secund*. Acest proces se vedea în anii douăzeci ai veacului trecut prin perspectiva rezultatelor lui Felix Klein asupra importanței unificatoare

[49] V. Pambuccian, „Euclidean geometry problems rephrased in terms of midpoints and point-reflections", *Elem. Math.,* 60 (2005), 19-24.

a geometriei proiective; de aceea Barbilian îşi descria cercetările ca fiind situate în paradigma deschisă de Programul de la Erlangen.

Şi încă o idee importantă bine subliniată de Victor Pambuccian în acelaşi articol: „Ceea ce căutăm în analiza inversă e minimizarea numărului şi a complexității noțiunilor şi ipotezelor folosite în demonstrația unui anume enunț, şi putem foarte bine să ajungem la sisteme axiomatice diverse, exprimate cu noțiuni primitive, care nu sunt deloc comparabile". Fireşte, ne propunem aici o discuție pe marginea unui text literar. Dar, din pricina naturii textului în discuție, nu am putea avansa deloc în înțelegerea lui dacă nu am admite că formația autorului său, a lui Dan Barbilian, e prezentă în mod decisiv în text. E imposibil să nu vedem în harfele răsfirate „ce-n zbor invers le pierzi" o analogie cu analiza inversă. Ce înseamă oare „robul vibrat spre un mărgean"? Dar „gestul închis"? Această temă, a reducerii la esențe, repetată în întregul ciclu *Joc secund*, e felul în care un matematician educat în spiritul Programului de la Erlangen sugera prin metafore ceea ce analiza axiomatică produce în geometrie.

Nu e vorba despre orice om de ştiință, aşa cum sugerează unii autori, ci de experiența cuiva care a făcut cercetare în domeniul fundamentelor geometriei şi care l-a

urmărit pe David Hilbert la curs. La finele studiului pe care l-am făcut am descoperit că Barbilian nu doar a căutat în cercetarea lui acest „gest unitar”, dar a şi izbutit realizarea unei construcții duale: experiența descrisă în poezie e dublată de cercetarea matematică a aceluiaşi autor. Pentru că oscilația logaritmică *este un astfel de „gest închis”, este un procedeu matematic care izbuteşte să genereze metrica euclidiană, metrica sferică şi metrica hiperbolică.* Pentru Barbilian, motivul *cântecului încăpător* nu a fost doar vorbă goală, pentru că el a şi construit un astfel de procedeu cuprinzător. Şi nu sunt multe astfel de procedee unificatoare în geometrie. Faptul acesta nu mai aparține doar culturii române, ci trece dincolo de marginile ei. Cu o astfel de construcție, Barbilian a izbutit nu doar în poezie, ci şi în geometrie.

Poemele din *Joc secund* nu sunt doar ermetice, ci au substanță precisă, au conținut, sunt despre un subiect precis: ele descriu o axiomatică ideală a lumii întregi. Asta sugerează condițional-optativul din: „Ar trebui un cântec încăpător, precum/ Foşnirea mătăsoasă a mărilor cu sare”. Discuția acestei idei ne pune în situația de a reanaliza sub o nouă perspectivă poetica lui Barbilian, care ne apare acum a fi mult mai profundă decât părea multora dintre contemporanii săi. Mai mult, în termeni de

istorie a ideilor, putem afirma că acea construcție matematică datorată lui Barbilian, procedura de metrizare, este influențată în mod determinant de ideile Programului de la Erlangen, cel care, după descrierea sa de către Felix Klein în 1872, a influențat în mod determinant dezvoltarea geometriei, şi că o asemenea idee, venită pe filiația matematică David Hilbert – Dan Barbilian, dar şi Gaston Darboux – Gheorghe Țițeica – Dan Barbilian, a ajuns să aibă strânsă legătură cu felul cum a fost conceput ciclul de poeme intitulat *Joc secund*. O astfel de filiație conduce la concluzia că a existat o influență semnificativă a Programului de la Erlangen asupra unei părți a liricii lui Ion Barbu şi, implicit, asupra unor idei al căror câmp de manifestare a fost modernismul românesc.

Vom analiza această aserțiune şi în eseul următor.

Între laborioasa barbarie şi umanismul cel nou: istoria şi semnificația spațiilor Barbilian

Ne propunem să discutăm în cele ce urmează o fațetă a poeziei lui Ion Barbu, un aspect important pentru înțelegerea contextului cultural al modernismului românesc. Această analiză ne va permite câteva observații

care țin de istoria ideilor şi va arăta că o revoluție din câmpul geometriei, declanşată în a doua jumătate a secolului al XIX-lea, a lăsat pe teritoriul poeziei româneşti consecințe pur literare.

Dacă acordăm atenție cronologiei scrierii poemelor din *Joc secund* (scrise probabil în 1929), care au precedat definirea şi studiul procedurii de metrizare a lui Barbilian, există urme explicite în poezia lui Ion Barbu a unor idei de profundă analogie cu ceea ce s-a întâmplat în geometria metrică. Sunt cunoscute mai multe interpretări interesante asupra poeziei lui Barbilian care țin seama de experiența sa în geometrie. Vom aminti aici ceea ce George Călinescu a scris despre poemele din *Joc secund*: „Prin cultura lui, Ion Barbu are obsesia matematică şi în paginile sale se adună toate figurile şi expresiile specialității, ajungând până la cabalistica matematică".

Şi într-adevăr, ce să înțelegi la prima vedere dintr-un poem ca *Grup*? Să îl reamintim aici:

„E temnița în ars, nedemn pământ.
De ziuă, fânul razelor înşală;
Dar capetele noastre, dacă sunt,
Ovaluri stau, de var, ca o greşală.

Atâtea clăile de fire stângi!
Găsi-vor gest închis, să le rezume,
Să nege, dreaptă, linia ce frângi:
Ochi în virgin triunghi tăiat spre lume?”.

Basarab Nicolescu, în comentariul său la acest poem, spune că „Omul de ştiinţă, dornic de a construi o teorie unitară, exhaustivă a unui grup de fenomene, va reclama în mod firesc şi în domeniul spiritual o descriere completă, găsirea acestui atât de dorit «gest închis». Închiderea gestului este sinonimă cu completitudinea unei teorii. Atras de esenţe, poetul-om de ştiinţă va căuta să organizeze şi să ordoneze aceste esenţe într-un tot unitar”. Observaţia aceasta e cum nu se poate mai întemeiată, dar ar fi putut să fie mult mai precisă, dacă ar fi pus în legătură ideea poemului cu viziunea Programului de la Erlangen şi ceea ce a însemnat el pentru geometrii din acea perioadă istorică.

E important să arătăm că Dan Barbilian a căutat efectiv esenţele acestui „gest închis” şi, cu riscul de a vorbi despre lucruri mai puţin cunoscute, că a izbutit să facă asta. Mai precis, Dan Barbilian a reuşit o construcţie matematică de mare profunzime şi cuprindere în domeniul fundamentelor geometriei. Discuţia acestei idei şi analiza

receptării ei ne vor pune în situația de a reanaliza sub o nouă lumină viziunea asupra ideii de poem la Ion Barbu. Mai mult, putem afirma că acea construcție numită în general procedura de metrizare a lui Barbilian este puternic influențată de ideile Programului de la Erlangen, cel care, după descrierea sa de către Felix Klein în 1872, a influențat în mod determinant dezvoltarea geometriei. Dacă am stabili această aserțiune, ar însemna că am clarificat la nivelul istoriei ideilor influența esențială pe care Programul de la Erlangen a avut-o asupra unei părți a liricii lui Ion Barbu şi, implicit, asupra unor idei literare care s-au manifestat în spațiul modernismului românesc.

Basarab Nicolescu mai scrie că opțiunea lui Barbilian de a folosi titlul *Grup* pentru poemul amintit mai sus e semnificativă, întrucât „titlul concentrează mesajul barbian". Cu toate acestea, credem că Barbilian nu a avut în primul rând în vedere conceptul de grup algebric, ci ideea mult mai profundă de concept care să conțină caracteristici invariante ale lumii, ale realității. Interesante sunt ideile care rămân neschimbate atunci când diverse modificări structurale acționează asupra lor. Remarcabile sunt principiile care se află în spatele lucrurilor reale, asemănările, analogiile, cele care pot fi cuprinse într-un principiu comun. Aceasta e una dintre ideile sugerate de

Programul de la Erlangen. În fapt, dacă verificăm terminologia pe sursa germană de la 1872, Felix Klein foloseşte pentru grupul ce caracterizează o geometrie termenul de *Hauptgruppe,* tradus în engleză ulterior drept *principal group.* Ideea geometrică pe care acest concept o pune în evidență e aceea că în aşa-numitele geometrii Klein e imposibil să distingi un punct de altul prin proprietăți geometrice, deoarece respectivul grup acționează asupra întregului spațiu putând transforma orice punct într-un altul, aşa cum, de exemplu, în planul euclidian, translațiile „mută" orice punct într-altul. E foarte probabil ca pe Barbilian tocmai acest aspect de omogenitate să-l fi interesat, ca imagine şi ca simbol.

Pentru a discuta în detaliu aceste aspecte, vom prezenta câteva referințe de factură istorică şi personală. Vom reveni cu o interpretare asupra poeziei.

De unde se cunoştea Barbilian cu Țițeica? S-au întâlnit prima oară după perioada în care Gheorghe Țițeica, revenit de mai bine de un deceniu în România după ce şi-a susținut teza de doctorat sub conducerea lui Gaston Darboux, descoperise conceptele care stau la baza geometriei diferențiale afine. Țițeica era deja celebru pe plan internațional, dar desfăşura o activitate importantă în domeniul educației în România, între altele coordonând şi

organizarea Concursului *Gazetei matematice*. Ţiţeica scria rapoartele anuale asupra Concursului şi a decernării premiilor, care erau publicate în *Gazetă* ca editoriale. Câştigătorul ediţiei din 1911 a fost Dan Barbilian, elev în clasa a VI-a la Liceul „Gh. Lazăr”, despre care editorialul *Gazetei* consemnează „că a îndeplinit condiţiunile pe care le cerem noi pentru această deosebită cinste”. Acesta a fost contextul în care Barbilian l-a cunoscut pe Ţiţeica. Nu avea să-i urmeze sfaturile întotdeauna, dar primul context în care a primit informaţii de primă mână despre importanţa contribuţiilor matematice ale Programului de la Erlangen trebuie să fi fost legătura lui cu unul dintre cel mai bine informaţi geometri ai momentului.

Multe lucruri sunt foarte bine cunoscute atât matematicienilor, cât şi literaţilor. Se ştie că Dan Barbilian a studiat între 1914 şi 1921 matematica la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti şi că studiile i-au fost întrerupte de perioada în care şi-a satisfăcut serviciul militar în timpul Primului Război Mondial. Se ştie că între 1921 şi 1924 s-a aflat în Germania, unde a cochetat o vreme cu ideea de a scrie o teză sub îndrumarea lui Edmund Landau. La un moment dat, în 1922, Gheorghe Ţiţeica l-a povăţuit, printr-o scrisoare, să îşi scrie teza sub îndrumarea lui Wilhelm Blaschke. Dar Barbilian avea să opteze pentru

teoria numerelor şi pentru Edmund Landau. După cum se ştie, acest proiect academic nu va fi încununat de succes şi, în 1924, Barbilian a revenit în România; avea să-şi susţină doctoratul abia cinci ani mai târziu, la Universitatea din Bucureşti, sub conducerea lui Ţiţeica.

În istoria matematicii, de o deosebită importanţă sunt două dintre contribuţiile lui Barbilian: o scurtă lucrare de două pagini apărută în *ÄŚasopis pro pÄ›stovánàmatematiky a fysiky* (1934-1935), unde defineşte o procedură de metrizare care va fi numită în 1938 de Leopold Blumenthal „spaţii Barbilian”, şi două lucrări apărute în Germania în 1940 şi, respectiv, în 1941, intitulate *Zur Axiomatik der projektiven ebenen Ringgeometrien*, care au inspirat o direcţie de cercetare în geometria inelelor, direcţie asociată azi în literatura de specialitate cu numele său, al lui Hjelmslev şi al lui Klingenberg.

Biografii lui Ion Barbu (Dan Barbilian) consideră că anul 1933 ar fi reprezentat momentul întoarcerii sale la matematici. *Joc secund* apăruse de trei ani şi mare parte din creaţia lui în poezie era scrisă. Interesat încă din adolescenţă de geometria elementară, în perioada revenirii la matematici, a „regăsirii”, Barbilian s-a dedicat unor idei din aria fundamentelor geometriei, inspirat de

promisiunea generalizării unor concepte cu care se lucra de mai bine de un veac în geometria neeuclidiană. E adevărat că perioada când Barbilian a reflectat asupra unor probleme din aria geometriei hiperbolice a culminat în 1933. În acel an universitar, Dan Barbilian a predat un curs de matematici elementare şi geometrie descriptivă. Ni s-au păstrat notele de curs. În prefața lui scrie Barbilian că „matematicile elementare sunt matematici de întemeiere”, iar fraza aceasta e o marcă importantă a transformării moderniste a matematicilor[50].

În 1934, Barbilian a participat la un congres de matematică la Praga. Comunicarea de la Praga a fost publicată, ca o scurtă notă de două pagini, cum am amintit mai sus, în culegerea de documente a conferinței şi a fost urmată de o corespondență cu Wilhelm Blaschke[51], care era în anii treizeci unul dintre cei mai influenți geometri ai momentului. Blaschke a fost la

[50] Terminologia pe care o adoptăm aici e sugerată de Jeremy Gray în *Plato's Ghost. The Modernist Transformation of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 2008.

[51] Parte dintre scrisori au fost publicate de Sorin Popescu în volumul *Fascinantul Ion Barbu (Dan Barbilian)*, Monitorul Oficial, 2008. Unele dintre schimburile epistolare sunt dezamăgitoare: nu se referă la geometrie, ci la politica Axei din acea perioadă.

congresul de la Praga şi s-a arătat interesat de ideile prezentate acolo de Barbilian.

În fapt, despre ce e vorba în toată această teorie şi în ce constă originalitatea ideii lui Dan Barbilian? Modelul Poincaré al geometriei neeuclidiene a lui Lobacevski generează în mod natural o distanță care poate fi reprezentată ca oscilație logaritmică, adică sub forma unui logaritm dintr-o fracție care exprimă maximul unei mărimi geometrice supra minimul aceleiaşi mărimi. Terminologia de oscilație e folosită pentru a descrie faptul că maximum şi minimum sunt considerate atunci când un punct mobil e variabil într-o mulțime dată. Contribuția lui Dan Barbilian a fost de a analiza cât de generală e această procedură şi de a stabili o teorie a spațiilor metrice înzestrate cu o distanță construită în acest fel. În lucrarea din 1934, Barbilian a definit o metrică în interiorul unei regiuni planare oarecare, generalizând astfel ideea modelului geometriei hiperbolice a lui Poincaré, model definit doar în interiorul discului unitate. Cu acea metrică, interiorul mulțimii devenea un model de geometrie neeuclidiană. Paradoxal, Barbilian nu a mai publicat nimic pe această temă în următorii cinci ani, deşi a lucrat în continuare la acest proiect, dacă e să dăm crezare însemnărilor sale. Peste ani va scrie că notele din perioada

aceea s-au pierdut; avea să le refacă la finele anilor cincizeci.

Receptarea contribuției lui, fie şi numai pe baza scurtei note publicate la Praga, a mers mai departe. Într-un volum de Leonard Blumenthal, apărut la Universitatea din Missouri în 1938 cu un cuvânt înainte de Karl Menger şi intitulat *Distance Geometries: a Study of the Development of Abstract Metrics*, se află un paragraf dedicat spațiilor Barbilian. După 1939, interesul matematic al lui Dan Barbilian se deplasează spre aria algebrei şi a teoriei numerelor. Din păcate, această modificare de arie a cercetării s-a petrecut înainte ca el să fi scris într-o formă finală teoria pe care o gândise în perioada 1934-1939. Apoi, aşa cum e bine cunoscut, avea să urmeze o perioadă istorică extrem de frământată care, cel puțin în România, nu s-a încheiat curând.

În timp ce Dan Barbilian preda şi reflecta asupra unor chestiuni de algebră la Universitatea Bucureşti, la celălalt capăt al lumii ideea lansată de el la Praga în 1934 suscita în continuare interes. Cel care avea să o repună în discuție după război a fost Paul Joseph Kelly. Născut în 1915 în Riverside, California, Kelly şi-a susținut teza de doctorat în 1942 la University of Wisconsin – Madison, apoi, vreme de trei ani, a fost locotenent în forțele aeriene ale Statelor

Unite. După război, a devenit profesor la University of California – Santa Barbara, de unde s-a pensionat abia în 1982 şi unde, începând cu 1957, a deținut pentru câțiva ani poziția de şef al Departamentului de Matematică. În perioada când a fost interesat de spațiile Barbilian, Kelly a scris, între altele, articolul „Barbilian geometry and the Poincaré model", apărut în *American Mathematical Monthly*, în numărul din mai 1954. Articolul lui Kelly începe astfel: „Într-o foarte scurtă lucrare din *ÄŚasopis pro pÄ›stovánàmatematiky a fysiky* (1934-1935), D. Barbilian defineşte o clasă de spații metrice (pe care le vom numi spații Barbilian) şi enunță câteva dintre proprietățile lor. [...] Ni se pare că abordarea lui Barbilian asupra modelului Poincaré are anumite avantaje de simplitate şi generalitate". Acest comentariu se referă la lucrarea prezentată în congresul de la Praga, care îşi păstra interesul şi la 20 de ani de la momentul scrierii. Se dovedeşte astfel forța ideii lui Barbilian din 1934. Generalizarea respectivă era de interes şi era greu de depăşit, ca amplitudine a construcției, chiar şi la două decenii distanță. *Monthly* este, probabil, una dintre cele mai răspândite şi vizibile publicații din lume, în 1954 ca şi acum, iar apariția articolului lui Kelly trebuie că a readus subiectul în sfera de interes a momentului.

Recenzia din *Mathematical Reviews* a articolului lui Kelly avea să fie scrisă de Blumenthal. La Bucureşti, Dan Barbilian află de articolul lui Kelly din *Monthly* şi vestea trebuie să-l fi impresionat. Îşi dă seama că ceea ce obținuse el reprezenta un pas mai departe în arhitectura teoriei şi asta-l determină să scrie teoria într-o formă publicabilă.

În ultimii trei ani ai vieții, D. Barbilian avea să scrie patru lucrări de geometrie dedicate acestui subiect. Prima dintre ele se numeşte „Asupra unui principiu de metrizare" şi a apărut în *Studii şi cercetări matematice*, vol. 10 (1959). În partea de introducere a lucrării, Dan Barbilian prezintă întreaga istorie a acestor idei, văzută dintr-o perspectivă proprie. El spune: „Se va vedea că punctul de vedere al generalizării din 1934 poate fi cu mult depăşit. Ne găsim în fața unui procedeu foarte general de metrizare, prin care funcțiile pozitive de două puncte (aşa-numitele «distanțe generale»), pe anumite mulțimi, pot fi rafinate până la o distanță". Continuă să scrie în română şi toate articolele sunt direcționate către revista *Studii şi cercetări*. Cu toate acestea, mesajul ajunge la destinație, adică la cei care puteau înțelege substanța matematică a acestor cercetări, căci articolele din *Studii şi cercetări matematice* erau recenzate de referenții care scriau pentru

Mathematical Reviews. Cel care avea să fie invitat să scrie recenzia pentru articolul „Asupra unui principiu de metrizare” este tot L.M. Blumenthal, care s-a aflat în fața articolului scris în română. În recenzie, el avea să consemneze, între altele: „Lucrarea de față extinde pe larg această procedură de metrizare şi investighează în detaliu spațiul rezultat”. Acest detaliu este important pentru că oferă o confirmare din momentul respectiv asupra originalității şi valorii teoriei. În plus, Blumenthal confirmă caracterul de generalizare al construcției lui Barbilian din 1959.

Aveau să urmeze articolele „Fundamentele metricilor abstracte ale lui Poincaré şi Carathéodory ca aplicație a unui principiu general de metrizare” (lucrare prezentată la Institutul de Matematică în data de 4 iunie 1959), apărut în *Studii şi cercetări matematice*, vol. 10 (1959); „J-metricile naturale finsleriene”, apărut în aceeaşi revistă în vol. 11 (1960); şi lucrarea scrisă împreună cu Nicolae Radu şi apărută postum „J-metricile naturale finsleriene şi funcția de reprezentare a lui Riemann”, publicată tot în *Studii şi cercetări matematice*, vol. 12 (1962). Ultima lucrare a fost depusă la redacție de Nicolae Radu pe 20 octombrie 1961; Barbilian se stinsese pe 11 august, în acelaşi an.

În 1981, P.J. Kelly a publicat la Springer Verlag un manual de geometrie neeuclidiană împreună cu Gordon Matthews (de la California State University, Long Beach), volum care se încheie cu un capitol dedicat spațiilor Barbilian. Acest capitol e de o claritate remarcabilă şi demonstrează că, în mâna unui educator inteligent, construcția procedurii de metrizare a lui Barbilian poate deveni un instrument didactic extrem de util în ilustrarea geometriilor neeuclidene. În fond, e vorba despre o teorie pe care Barbilian a construit-o generalizând o observație dintr-un model de geometrie hiperbolică; de ce nu s-ar studia acest subiect la cursuri unde oricum se studiază geometria hiperbolică?

Pentru Barbilian, adâncirea studiului unor modele ale geometriei hiperbolice fusese „gestul închis" ce „rezuma" un fenomen vizibil în discul unitate. O bună măsură a profunzimii acestei construcții o reprezintă perenitatea ei şi faptul că ea a reapărut într-o altă ramură a matematicii, mai precis în analiză. Pentru că istoria receptării procedurii de metrizare nu se încheie nici pe departe aici. Lucrarea din 1934 a revenit în ultimii ani în atenția cercetătorilor, în special după ce, în 1995, Alan F. Beardon (de la University of Cambridge) a redescoperit independent rezultatul din 1934 şi a reuşit o generalizare a lui. În

1998, F.W. Gehring (de la University of Michigan, Ann Arbor) şi K. Hag (de la Universitatea Norvegiană de Ştiinţă şi Tehnologie) au continuat ideea lui Beardon, citând ca punct de plecare construcţia lui Barbilian din 1934 (lucrarea lor a apărut în 2000). De atunci, lucrarea lui Barbilian de la Praga a fost citată de mai multe ori de Peter Hästö (de la Universitatea din Oulu, Finlanda), Zair Ibragimov[52] (între altele, în teza sa de doctorat de la University of Michigan, Ann Arbor, din 2002) şi de alţi autori în cursul studiului lor asupra metricilor apolloniene. E vorba de citări semnificative, în reviste cu impact ştiinţific important. O monografie mai cuprinzătoare asupra subiectului, *Hyperbolic Geometry and Barbilian Spaces*, a apărut în 1996 sub semnătura lui Wladimir G. Boskoff, la Hadronic Press[53]. Există, desigur, şi alte contribuţii recente asupra acestei probleme, însă nu ne propunem să le amintim pe toate aici. Oricum, ceea ce ne-am dorit să prezentăm este evoluţia ideii de spaţiu Barbilian, precum şi perenitatea interesului pentru creaţia

[52] Din 2007, Zair Ibragimov se află la California State University, Fullerton. În 2012 i-a fost decernat Premiul Internaţional Anassilaos în Matematici din partea Associazione Culturale Anassilaos, Italia.

[53] Acest volum a fost distins cu un premiu al Academiei Române.

din aria geometriei a lui Barbilian din perioadele 1934-1939 şi 1959-1961.

Important este următorul lucru, care nu este probabil suficient de cunoscut, nici suficient explicat. Geometria pe care o studiem noi, cu toţii, în şcoala elementară este geometria euclidiană, cea în care suma unghiurilor unui triunghi este de 180 de grade, iar printr-un punct fix exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă. În geometria sferică, unde dreptele sunt cercurile mari, aşa cum e de pildă ecuatorul sau cum sunt meridianele, suma unghiurilor unui triunghi este mai mare de 180 de grade şi mai mică de 270 de grade. Printr-un punct exterior unei drepte, pe sferă nu se poate duce nici o paralelă. În geometria hiperbolică, printr-un punct exterior unei drepte se pot duce o infinitate de drepte nesecante unei drepte date. Suma unghiurilor unui triunghi în planul hiperbolic este mai mică strict de 180 de grade, putându-se apropia de 0 grade. Aceste geometrii diferite pot fi construite enunţând un set de axiome. Prima construcţie impecabilă din punct de vedere logic în domeniul fundamentelor geometriei a fost realizată de David Hilbert, în perioada 1893-1902; iar Barbilian a ţinut să urmeze cursurile lui David Hilbert după 1921, în

Germania. Partea extrem de importantă a construcției lui Barbilian e că pentru o alegere specială, nu tocmai evidentă, a elementelor constitutive ale procedurii de metrizare se obțin cazuri particulare de geometrii remarcabile. Între acestea se află geometria hiperbolică, geometria sferică şi geometria euclidiană. Astfel, toate aceste geometrii pot fi privite ca nişte cazuri particulare de spații Barbilian, înzestrate cu o metrică de tip oscilație logaritmică[54].

Semnificația acestui rezultat e uriaşă. Nu există prea multe proceduri *unificatoare* în geometrie. Într-un volum recent de geometrie riemanniană, Peter Petersen menționează ca proceduri unificatoare *transformarea conformă* şi *warped products*. Oscilația logaritmică este, din punctul de vedere al fundamentelor geometriei, cel puțin la fel de importantă ca şi celelalte două, iar aceste trei procese sunt singurele care pot produce cele trei geometrii diferite pentru suprafețe (adică: sferică, hiperbolică şi euclidiană).

---

[54] Acest rezultat apare pentru prima oară într-o lucrare scrisă de Wladimir Boskoff şi de mine, apărută în *Czechoslovak Mathematical Journal*; am ținut să publicăm acest rezultat în aceeaşi revistă de matematică unde Barbilian şi-a publicat contribuția din 1934, pentru că *Czechoslovak Mathematical Journal* continuă tradiția editorială a mai vechiului *ÄŚasopis pro pÄ›stovánàmatematiky a fysiky.*

Altfel spus, procedura de metrizare este un principiu care cuprinde şi precedă, în sensul fundamentelor, conținutul axiomatic al diverselor geometrii. Asta vor fi încercat oare să sugereze Kelly şi Matthews atunci când şi-au încheiat manualul din 1981 cu un astfel de capitol? Neîndoielnic, da. Barbilian ştia foarte bine că ideea procedurii sale de metrizare generează, pentru diferite alegeri ale mulțimilor-cadru şi ale aşa-numitei funcții influență, o multitudine de geometrii diferite. Ideea fusese folosită şi exploatată în articolele din 1959-1962, dar nu în articolul din 1934, care nu a consemnat decât prima idee. Barbilian ştia foarte bine că descoperise un concept unificator, important pentru ordinea geometrică a lucrurilor.

Receptarea ideii procedurii de metrizare a lui Barbilian şi numeroasele ei citări nu fac decât să dea seama de măsura reuşitei matematice a acestei construcții. În acest sens, Barbilian a izbutit punerea în evidență a unui principiu unificator. Astfel, ideea care părea doar sugerată într-un poem este de fapt materializată printr-o construcție. Nu e vorba doar de o dorință poetică, ci de exprimarea în poem a unui gând care s-a putut materializa în geometrie. Şi era un gând care provine din filozofia Programului de la Erlangen, care tocmai spre

identificarea unor astfel de proceduri unificatoare îndemna.

Să mergem mai departe şi să explorăm semnificaţia acestei construcţii.

Pentru aceasta, să ne întoarcem în 1940. Atunci când se pregătea pentru obţinerea unei promovări universitare, Dan Barbilian a scris un text intitulat *Notă asupra lucrărilor ştiinţifice*. Acest material conţine o prefaţă intitulată „Formaţiunea matematică” şi este unul dintre cele mai relevante texte pentru înţelegerea viziunii integratoare a autorului asupra unor domenii diferite ale creaţiei aşa cum sunt matematica şi poezia. Analogia e descrisă în termenii „desăvârşirii figurii armonioase a lumii”, o idee care nu e departe de temele centrale ale liricii lui Ion Barbu, precum cea din poemul *Grup.*

Ideea importantă, foarte bine subliniată în acest text din 1940 într-o formă pe care nu am găsit-o exprimată la fel de clar altundeva, e aceea că matematicile contribuie la constituirea unui „eclectism luminat” pe care Barbilian nu ezită să-l descrie drept „umanismul cel nou”. Ce înseamnă oare acest umanism? Ce avea el oare în vedere? Pentru a reprezenta despărţirea lui de profesorul Landau, pe care îl considerase ca posibil conducător de doctorat, Barbilian scrie că teoria numerelor, „aşa cum o concepea Landau”,

este nici mai mult, nici mai puțin decât „o întrecere de formule de evaluare asimptotică”. Ceea ce căuta el în matematici era altceva, o viziune pe care această „întrecere de formule” era departe de a o satisface. Ceea ce Barbilian invocă în 1940 e un lucru nu lipsit de oarecare spectaculozitate: „universul moral al conceptelor”, cel care ar asigura unitatea de puncte de vedere asupra unor domenii diferite. Iată cel mai relevant pasaj din lucrarea publicată în 1940:

> „Personal mă consider un reprezentat al Programului de la Erlangen, al acelei mişcări de idei care, în ceea ce priveşte întinderea consecinţelor şi răsturnarea punctelor de vedere, poate fi asemuit Discursului Metodei sau Reformei înseşi. Specializării strâmte ori tehnicității opace, de dinainte de Erlangen, se substituie un eclectism luminat. El continuă adâncirea fiecărei teorii în parte, fără să piardă din vedere omogenitatea şi unitatea întregului. Astfel, cercetarea matematică majoră primeşte o organizare şi orientare învecinate cu aceea a funcțiunii poetice, care, apropiind prin metaforă elemente disjuncte, desfăşură structura identică a universului sensibil. La fel, prin fundarea axiomatică sau grupal-teoretică, matematicele asimilează doctrinele diverse şi slujesc scopului ridicat de a instrui de unitatea universului moral al conceptelor. În acest chip ele încetează de a mai fi o laborioasă barbarie, ci, participând la

desăvârşirea figurii armonioase a lumii, devin umanismul cel nou”.

În acest pasaj e descris întregul interes teoretic al lui Dan Barbilian pentru fundamentele geometriei şi pentru cercetările din domeniul algebrei. Pentru el, demn de interes în matematici nu e aspectul calculatoriu, „laborioasa barbarie”, ci „învingerea dificultăților” (cum scrie el altundeva) în sens strict teoretic, adică obținerea unui principiu unificator, ridicarea la nivel de concept, construcția care cuprinde, precum fațetele unuia şi aceluiaşi fenomen, mai multe manifestări diverse. Astfel, în spatele calculelor se află principiul, în spatele labirintului de tehnicalități se află cheia care declanşează mecanismul generativ al unui spațiu, al unei geometrii. O astfel de construcție a fost materializată în cele patru substanțiale lucrări dedicate procedurii de metrizare din perioada finală a vieții lui Barbilian. Ideea nu e diferită dacă e exprimată astfel: „Poetul ridică însumarea/ De harfe răsfirate ce-n zbor invers le pierzi/ Şi cântec istoveşte [...]”. Acest pasaj ni se pare a fi o descriere explicită a viziunii unificatoare, a căutării principiului ultim, fundamental. Din acest unghi, poezia apare drept o cale de cunoaştere, de cuprindere a esențialului, de eliminare a balastului, a ceea ce este tehnic, repetitiv,

nenecesar, inutil, „laborioasă barbarie”. Iar *Joc secund*, volumul, e însoțit de un motto de Stéphane Mallarmé: „ne fût-ce que pour vous en donner *l’idée*”. Sublinierea cuvântului *l’idée* îi aparține lui Barbilian, şi pare a sugera aici principiul generator, cel care conține cheia, taina întregului. Poezia cuprinsă în volumul *Joc secund* reprezintă aşadar enunțul unui principiu poetic, un cadru general de recunoaştere a poeziei ca mijoc de explorare şi de înțelegere a lumii. Ni se pare că ideea depăşirii tehnicității e faptul descris prin „tăierea cirezilor agreste”, iar viziunea odată cucerită prin realizarea unei construcții cuprinzătoare e descrisă printr-o „intrare în mântuit azur”. Iar „grupurile apei” sunt menite a sugera elementele care rămân neschimbate odată ce este obținută construcția generalizatoare. Iată strofa integral: „Din ceas dedus, adâncul acestei calme creste,/ Intrată prin oglindă în mântuit azur,/ Tăind pe înecarea cirezilor agreste,/ În grupurile apei, un joc secund, mai pur”. Atunci când scrisese aceste versuri, Barbilian nu ştia că în câțiva ani va realiza o construcție de un asemenea impact ştiințific şi de o asemenea profunzime. Totuşi, opțiunea lui ştiințifică în matematici era bine definită. Ştim că îşi exprimase cu asupra de măsură disprețul pentru excesiva tehnicalitate care nu duce la principiu şi aprecierea pentru demersurile

care spun ceva, care adâncesc în sens calitativ viziunea cuprinzătoare asupra lumii. Într-un fel, eroarea umană fundamentală ar fi, pare el să ne sugereze, aceea de a nu vedea, de a nu pricepe esențialul, atunci când acesta ar fi totuşi accesibil. Sau, exprimând această idee interogativ, în poemul *Grup*, ideea pierderii în tehnicalitate, în rutină, lăsând în deficiență înțelegerea principiului, se poate descrie astfel: „Atâtea clăile de fire stângi!/ Găsi-vor gest închis, să le rezume,/ Să nege, dreaptă, linia ce frângi:/ Ochi în virgin triunghi tăiat spre lume?". Linia frântă să fie oare drumul cel mai scurt din vreun model de geometrie neeuclidiană? Să fie oare surprinzătoarele geodezice din modelele hiperbolice?

Cum a urmărit Barbilian această idee vreme de decenii se poate vedea şi dacă amintim aici una dintre cele mai controversate intervenții literare pe care ne-a lăsat-o. Sunt cunoscute polemicile în care Dan Barbilian a intrat în epocă. Să reamintim aici cum a citit şi comentat poezia lui Tudor Arghezi, într-o intervenție cu accente voit îngroşate: „Domnul Arghezi face poezii cu inocenta aplicațiune spre migală a unui ceasornicar. Câteodată trece şi la bardă. O poartă țărănească cu vopseli târgoveţe ia ființă. Alteori, travestit în brodeuză, ia acul, foarfecele şi lucrează olandă *à jour.* Toate acestea sunt foarte bune deprinderi

călugăreşti. Dar parfumurile duhovniceştilor virtuți le bănuim irevocabil mistuite. Ne găsim în prezența banală a unui poet fără mesaj, respins de Idee; ca altădată, de macerările vieții schimniceşti". Şi încă, în acelaşi text, mai dur: „Şi, iată, atingem culpa originară a poeziei lui Arghezi, principiul de osândă pe care îl închide. *E o poezie castrată.* Atributul clar al ideii a fost smuls. Vagi funcții feminine o turbură. Şi atunci se întoarce sau se epuizează în spume de injurii. Cel mai adesea împleteşte, palidă şi moscovită, plesne şi cozi la versuri. Plasticitatea masei ei verbale merge până a se turna în grele maşini teologice, parodii de sfinte mistere. Dar viața tremurată a artei, marea linie, marea intensitate, e departe de această impură industrie".

Dacă astfel de observații ar fi venit din partea cuiva care n-ar fi întreprins demersuri de esențializare a conceptelor, am putea crede că ne aflăm în fața unei simple calomnii cu substrat personal, şi Barbilian nu a fost lipsit de astfel de ieşiri. Atunci când i se cere să se confrunte cu o lume atât de plină de idei precum este lumea invarianților geometrici, poezia lui Arghezi se vede altfel decât, de pildă, atunci când e supusă privirii critice a lui Eugen Ionescu, în *Nu*, sau fie şi coborâtă sub tirul de apăsătoare ironie la care o supun parodiile lui George Topârceanu. Poeziei i se pretinde să fie mai mult decât

meşteşug, să acceadă la idee, să treacă de simpla sensibilitate şi potrivire, să ofere o viziune profundă.

În fond, despre asta era vorba, şi abia acum înțelegem substanța reproşului. Lectura simultană din David Hilbert şi din Tudor Arghezi a produs această reacție.

Un exemplu de teorie al cărei timp se stinge

Geometria triunghiului a deținut vreme de mai bine de un secol un rol regal. Pentru cei mai mulți liceeni, acela a fost probabil primul teritoriu unde s-au întâlnit cu frumusețea aridă a geometriei. Unii dintre ei au luat jocul în serios. Acum trei decenii, în România au apărut trei volume destinate publicului larg, scrise cu talent, umor şi bună inspirație de Viorel Gh. Vodă. În acele cărți se amintea despre viața de altădată a *Gazetei matematice*, despre probleme de geometrie demodată, despre goana după puncte importante în triunghi.

Aminteam mai înainte că una dintre cărțile lui Viorel Gh. Vodă a fost prima carte din pricina căreia am făcut o noapte albă. Aveam 15 ani şi mi s-a părut la vremea respectivă cea mai interesantă lectură de la finele şcolii elementare. Mai târziu aveam să încep să citesc mai multă literatură de ficțiune şi atracțiile livreşti aveau să se

diversifice, dar momentul când am descoperit geometria triunghiului a rămas o experiență personală care m-a marcat. Cred că experiența aceasta nu a fost deloc singulară pentru cei din generația mea. Mi-am început cariera de cititor grație unei scurte monografii dedicate geometriei triunghiului. Puțin după aceea am început să particip la taberele de vară ale *Gazetei matematice* şi să scriu materiale care au apărut în paginile vechiului periodic de matematică.

Am fost surprins şi nu prea fericit atunci când am descoperit articolul lui Philip J. Davis (care a ieşit între timp la pensie de la Universitatea Brown) intitulat, cu o notă arhaică nu lipsită de subtilă ironie, „Înălțarea, căderea şi posibila transfigurare a geometriei triunghiului: o mini-istorie”[55]. Vestea proastă era că acest articol, excelent argumentat, suna ca un prohod al unei întregi discipline, cu aceeaşi notă de tristețe implicită pe care o resimțim atunci când citim în *Stăpânul inelelor*, trilogia lui J.R.R. Tolkien, despre plecarea rasei elevilor către tărâmurile eternității. Cum adică, geometria triunghiului a ajuns la final? Ce să însemne asta? Să fie acesta articolul

[55] Philip J. Davis, „The Rise, Fall, and Possible Transfiguration of Triangle Geometry: A Mini-History”, *The American Mathematical Monthly*, 102 (1995), 204-214.

vreunui universitar care nu ştie ce spune? Ce are de spus un geometru crescut în tradiția *Gazetei matematice* despre una ca asta?

Ei bine, profesorul Davis are dreptate. Actul de naştere al geometriei triunghiului e probabil lucrarea lui Leonhard Euler din 1765, în care se stabileşte coliniaritatea centrului de greutate, a ortocentrului şi a centrului cercului circumscris. Ar mai fi în triunghi un punct important, intersecția bisectoarelor, care este totodată şi centrul cercului înscris în triunghi. În 1803, Kluegel a numit aceste patru puncte *merkwuerdige Punkte*, adică punctele remarcabile ale triunghiului. Ce e aşa de remarcabil în legătură cu ele? Adevărul e că faptul că trei drepte importante dintr-un triunghi oarecare se întâlnesc într-un punct este într-adevăr remarcabil, pentru că dacă cea de-a treia dreaptă n-ar fi trecut prin punctul de intersecție al primelor două, n-am mai fi avut această proprietate de incidență. O teoremă importantă în istoria geometriei triunghiului a fost demonstrată în 1820 de Poncelet şi Brianchon: e vorba de aşa-numita problemă a cercului celor nouă puncte. În decursul istoriei, diverse alte puncte importante în triunghi au fost puse în evidență de matematicieni celebri, şi nu numai. Există o teoremă despre triunghiuri atribuită lui Napoleon. Există conice

importante în triunghi, precum şi cercuri importante în triunghi. Există un punct al lui Torricelli, al lui Nagel, al lui Gergonne, punctele lui Brocard şi cercurile lui Brocard, şi aşa mai departe. La începutul veacului XX, la Universitatea Bucureşti exista un curs dedicat geometriei triunghiului. Clark Kimberling a scris un tratat dedicat elementelor geometrice importante în geometria triunghiului, iar Paul Yiu a avut în 2000 inițiativa lansării unui jurnal electronic dedicat subiectului, un proiect care a interesat mulți autori[56].

După mai mulți autori, geometria triunghiului ca domeniu aparte s-a dezvoltat după 1870, atunci când E. Lemoine şi-a concentrat studiile asupra acestui subiect. Philip Davis, scriind despre autorii care au produs lucrări de amploare în acest domeniu, nu îşi poate reține un zâmbet: „În momente de euforie, unii dintre aceşti autori priveau geometria triunghiului ca pe un nou şi împlinit Euclid, tot aşa cum despre Noul Testament s-a afirmat că e împlinirea Vechiului Testament”.

În zilele noastre însă, continuă Philip Davis, geometria triunghiului a devenit piesă de muzeu. El citează opinia lui E.T. Bell, care, încă din 1940, scria că „geometrii secolului

[56] E vorba de *Forum Geometricorum*, unde autorul acestor rânduri a publicat de patru ori.

XX au îndepărtat de mult toate aceste comori către muzeul geometriei, acolo unde praful istoriei repede le-a acoperit strălucirea". Şi cu toate acestea, punctează mai departe Davis, iată geometria triunghiului în continuare prezentă în publicațiile cu aură elementară, ca de pildă *American Mathematical Monthly*, *Mathematical Gazette* (el se referă la cea de la Londra, editată de Mathematical Association din Marea Britanie), *Crux Mathematicorum* şi altele. Cred că Davis are multă dreptate atunci când spune că „matematicienii ar putea să se joace de acum cu aceste probleme ca şi cum ar fi o sursă de relaxare; ei ar putea chiar să resimtă o intensă satisfacție, dar probabil n-ar vrea să-şi vadă reputația profesională judecată pe baza unei contribuții de acest fel".

Cum de a fost posibil un asemenea fenomen? Ne interesează, de fapt, aspectul simptomatic în câmpul culturii: când are loc dispariția unui întreg capitol al unui domeniu? Când se mută o întreagă direcție de cercetare din aria activă direct în muzeul domeniului? Şi de ce considerăm că un alt capitol, oarecum învecinat, precum axiomatica, fundamentele geometriei, are mare potențial pentru educație, în timp ce geometria triunghiului, care e atât de spectaculoasă, nu se află într-o situație similară? Ce anume face diferența?

De fapt, într-un anume sens putem admite că geometria triunghiului şi-a epuizat resursele. Suntem gata să acceptăm această critică şi să admitem că un capitol pasionant al geometriei demodate aparţine trecutului. Dar ce ar putea însemna în general că o teorie şi-a epuizat resursele? Să încercăm să extragem de aici o concluzie pentru întreaga arhitectură a ştiinţei. E oare vorba de problemele de cercetare din capitolul respectiv? Ar fi ideal dacă, de exemplu, medicina şi-ar epuiza problemele. Cum ar fi să rezolve şi medicii problema cancerului, a maladiei SIDA, a altor maladii în prezent incurabile? Privim geometria triunghiului şi visăm: aşa ar trebui să arate lucrurile în mod ideal în evoluţia unui domeniu ştiinţific. Adică pentru o vreme să existe probleme greu de rezolvat, care să suscite pasiune şi dedicaţie, şi apoi să putem spune: iată, toate problemele interesante au fost rezolvate, deci din punctul de vedere al cercetării domeniul e de acum numai bun de pus în vitrina unui muzeu.

Da, dar oare nu se poate spune acelaşi lucru şi despre filozofie? Nu s-ar putea spune acelaşi lucru şi despre alte capitole ale ştiinţelor umane? E oare destinul geometriei triunghiului simptomatic şi pentru alte domenii?

Să ne întoarcem la lucrarea lui Davis ca să amintim *motivele* enumerate de el pentru care geometria

triunghiului ar fi murit. Poate că în această listă de motive se află răspunsul. Ne interesează aceste raţiuni nu doar pentru domeniul respectiv, ci pentru a vedea câte dintre ele se extind, de fapt, şi la alte capitole ale ştiinţelor sau ale vieţii academice.

Motivele enumerate de el pentru stingerea geometriei triunghiului sunt următoarele:

„(1) Percepţia că subiectul e în parte elementar, la un nivel «amator», sau de natura matematicilor recreaţionale şi, în consecinţă, este de statut profesional scăzut. Subiectul nu este «adânc». La nivelul psihologiei profesionale există sentimentul că şi în cazul în care demonstraţia unei afirmaţii nu ar fi numaidecât transparentă sau clară, am putea oricând să «intrăm cu buldozerul» şi să completăm demonstraţia folosind geometria analitică. Şi atunci, de ce să ne mai batem capul? [...]

(2) S-a ajuns la epuizarea internă a interesului şi a varietăţii posibilităţilor teoreматice şi metodologice. [...] N-au apărut probleme noi, extraordinare, pentru mult timp nerezolvate, care să captiveze imaginaţia şi să provoace inteligenţa matematică aşa cum s-a întâmplat cu faimoasa listă de probleme a lui Hilbert. Altfel spus, n-au apărut idei noi în geometria triunghiului. [...]

(3) Cele mai «adânci» rezultate din geometria triunghiului dovedesc o complexitate vizuală crescândă [...][57].

(4) Există punctul de vedere apărut la finele secolului al XIX-lea, care a scăzut în mod serios rolul vizualului în favoarea algebricului şi a simbolicului.

(5) Susceptibilitatea sentimentului de surpriză are părţile ei bune, dar şi părţile ei rele. (Vai! Oare aceste trei drepte se intersectează în unul şi acelaşi punct? Cine s-ar fi aşteptat la asta?) Dar profesioniştii sunt expuşi la mult prea multe teoreme şi mult prea multe surprize. Astfel, surpriza este cumva atenuată şi redusă, iar importanţa ei psihologică pierde din valoare, lăsând loc plictiselii.

(6) Reatribuirea sau migrarea unei părţi a conţinutului geometriei triunghiului către alte domenii tradiţionale sau nou-apărute. De exemplu, faimoasa teoremă a lui Desargues despre două triunghiuri în perspectivă e privită azi ca fiind parte a geometriei proiective. Alte teoreme sunt privite ca fiind parte a geometriei transformării inverse sau a geometriei algebrice.

(7) O sărăcie a legăturilor sau aplicaţiilor considerate ca fiind «vii»; în particular, a conexiunilor cu domenii precum fizica etc. [...]

(8) Concurenţa tot mai puternică după al Doilea Război Mondial din partea altor arii ale geometriei, deseori cu o solidă componentă vizuală sau cu pretenţii de mai largă

[57] Nu e nici o contradicţie între (2) şi (3).

aplicabilitate, ca de exemplu geometria convexă, teoria grupurilor şi simetriei, teoria pavajelor, teoria fractalilor, geometria computațională etc.”.

Acesta a fost citatul din lucrarea lui Philip Davis.

Pentru noi însă geometria triunghiului e un *caz*, numai bun de studiat în domeniul istoriei ştiințelor. Vreme de mai bine de o sută de ani a existat un anumit stil de a face geometrie, de a studia planul euclidian, de a trăi cu sincer interes problemele ivite acolo, şi apoi acel stil s-a stins. În toată povestea asta e ceva asemănător destinului piramidelor maya sau al statuilor abandonate în Insula Paştelui: în vechime cineva a creat monumentele, dar azi nimeni nu mai continuă acel stil de viață, deşi monumentele respective ne impresionează. În cazul nostru, deşi mai există încă practicanți, deşi mai există supraviețuitori, oameni care sunt atraşi sau fascinați de acest domeniu, nu se poate ca la o atentă analiză să nu-i dăm dreptate lui Philip Davis la toate cele opt puncte. Mai mult, cele opt motive amintite mai sus ar putea admite extensii şi echivalențe şi către alte domenii. Sunt tot atâtea simboluri ale decadenței unui domeniu, ale unei arii care se stinge. Vedem că ceea ce face ca anumite domenii să rămână vii şi de interes sunt problemele deschise din respectivele domenii. Cu alte cuvinte, viața

unui domeniu e dată de conjecturile, provocările, construcțiile, deschiderile către alte domenii sau către aplicații şi, nu în ultimul rând, de atingerea vieții reale. În absența acestora, un domeniu se practică doar în spiritul „artei pentru artă”.

Avem aşadar în geometria triunghiului istoria unui trib pe cale de dispariție. Te poți apropia de el cu interes şi dragoste. Pentru mine, experiența mea a depins de acest fel de a face matematică: pe aici am intrat într-un teritoriu secret. Am față de acest subiect o înțelegere dublată de nostalgie. Mai mult, sunt profund îndatorat intelectual unor geometri care s-au format la rândul lor la şcoala geometriei triunghiului, de la Euler până la Țițeica şi Barbilian. Dar asta nu înseamnă că nu pot evalua situația în momentul cultural de azi.

Dacă ar fi să schițăm aici programa şcolară a unui liceu ideal, nu aş susține niciodată întoarcerea la geometria triunghului pentru acel nivel de educație. Aria respectivă, tocmai pentru că nu aduce deschideri, nu ar fi candidatul ideal pentru o selecție de subiecte şi domenii care s-ar anunța încărcată. Geometria triunghiului e ceva net diferit de axiomatică, de fundamentele geometriei. Axiomatica e menită să educe calitatea de a raționa şi, tocmai prin aceasta, are un caracter de generalitate care

atinge esențialul. Importanța axiomaticii, a acelei componente a geometriei izvorâte din studiile lui Hilbert şi Birkhoff, e cu mult mai mare, pentru că include acel eşafodaj logic pe care numai fundamentele geometriei îl au. Geometria triunghiului e altceva, e un frumos obiect de muzeu. Că l-am iubit cândva e cel mult un detaliu de biografie sentimentală.

*

Pe măsură ce înaintam în studiul acestor lucruri, mi s-a părut că poezia care se scrie azi e *prea facilă.* Mi s-a părut că oricine poate pune laolaltă câteva pagini de momente de raritate[58], că oricine poate da naştere unei plachete de poeme. Atunci când ți se întâmplă să aşezi poezia față în față cu rigorile formei, ale spațiului, ale conceptelor reci care explică structura lumii, parcă simți nevoia de ceva mai mult, de ceva care să meargă direct la adevărul brut al lucrurilor. Ceva care în trei versuri să atingă exact esența. Cu cât făceam mai multă matematică,

[58] În *Note pentru o mărturisire literară* (1932), Ion Barbu spune: „Poezia întocmai ca un fenomen fizic participă la misteriosul vieții. Şi întocmai cum un fenomen fizic admite un model mecanic, tot aşa stările de raritate şi de vis ale poeziei pot fi reduse la un model rațional".

cu atât îl apreciam mai mult pe Cioran, cel din *De l'inconvénient d'être né*, sau pe Borges, cel din perioada finală, pentru că acolo găseam texte care, într-o formulare de maximă sinteză, atingeau esențialul... Problema mea ajunsese să fie nu poezia, ca gen literar, ci poezia care mi se părea uşor de fabricat, dar care nu spunea atât de mult cât ar fi putut spune. Dacă un poem nu-mi oferă o lume parcă născută din nimic, precum planul geometriei lui Bolyai, atunci nu mă interesează. Mă interesează în schimb poezia care surprinde esențialul, care dezvăluie întreaga cuprindere a unei drame, a unei tragedii, a condiției umane. Mă interesează formulările care stilizează la fel de mult cât a izbutit Hilbert atunci când a pus în evidență „atomii" unei teorii. Nu mă interesează efectele repetitive, miza pe surpriza-care-nu-e-de-fapt-surpriză.

*

Philip Davis scria că geometria triunghiului a migrat spre alte domenii. La fel cum şi teme care inițial țineau de filozofie au migrat spre alte domenii, către arii ale ştiințelor, de exemplu. Însă geometria triunghiului parcă ar fi dispărut sub o aură misterioasă. Una dintre transfigurările ei ține de miracol şi merită povestită aici.

Viziunea se datorează unui matematician născut în 1930, a cărui copilărie s-a aflat sub semnul nefericitei vânători de duşmani ai poporului declanşate sub Stalin: Victor A. Toponogov. După ce şi-a terminat liceul în 1948, Toponogov a studiat matematica la Tomsk, unde a absolvit în 1953. Nu era clar deloc dacă îşi va putea urma doctoratul, din pricina dificultăților de dosar. După moartea lui Stalin, şi-a putut continua doctoratul, iar în 1956 s-a mutat la Novosibirsk, unde a devenit cercetător la Institutul de Radio-Fizică şi Electronică. Pe când lucra acolo, şi-a susținut teza de doctorat la Universitatea de Stat din Moscova, în 1958. În teză, el a reevaluat o idee a lui A.D. Aleksandrov şi a extins-o la spații riemanniene. Astăzi, teorema aceea e numită teorema de comparație a lui Toponogov şi a dat naştere unui domeniu în plină efervescență: geometria comparației.

Ideea este de a compara configurații geometrice fundamentale din spații abstracte cu aceleaşi configurații retrasate pe sfere.

Să pornim de la o suprafață arbitrară, de exemplu de la suprafața unei statui celebre. Să ni-l imaginăm pe *David* al lui Michelangelo înscris într-o sferă. Îi vom compara forma cu cea a sferei care-l circumscrie. Dacă vrem să urmărim ceea ce se petrece pe suprafețe sau în spațiile

riemanniene, trebuie să-i găsim fiecărui obiect geometric spațiul său de comparație. Sfera care îl circumscrie e un bun cadru de referință.

Pentru aceasta, să considerăm doar acele curbe de pe suprafața pe care o studiem care reprezintă *drumul cel mai scurt* între două puncte date. Să ne imaginăm acum un triunghi compus din astfel de laturi. Limbajul matematic are un nume şi pentru aşa ceva: obiectul acesta se numeşte *triunghi geodezic.*

Dacă curbura unei suprafețe oarecare nu e mai mică decât un număr oarecare fixat *k*, atunci e firesc să comparăm unghiurile din orice triunghi de pe suprafață cu unghiurile unui triunghi geodezic dintr-un spațiu de curbură constantă *k.* Este ca şi cum am compara triunghiul nostru cu un triunghi de pe o sferă de rază egală cu inversul rădăcinii pătrate a lui *k.* Vom numi această sferă cu care comparăm totul un *spațiu de comparație*. Ei bine, una dintre teoremele importante în domeniu spune că unghiurile unui astfel de triunghi nu vor fi niciodată mai mici decât unghiurile corespunzătoare în triunghiul geodezic din spațiul de comparație.

Sunt mai multe astfel de teoreme de comparație, a căror demonstrație include elemente de geometrie demodată, laolaltă cu analiză matematică de înaltă

rigoare. Lucrurile nu sunt deloc simple, iar demonstrațiile nu sunt triviale. Ideea a fost studiată inițial de Élie Cartan, apoi de A.D. Aleksandrov, iar meritul lui Toponogov a fost de a fi dat acestei idei o haină de dimensiune arbitrară. Spațiile a căror curbură e mărginită superior de *k* se numesc azi spații *CAT(k)*, de la numele celor trei cercetători care au deschis calea în acest domeniu: Cartan, Aleksandrov, Toponogov.

Am amintit acest exemplu pentru a ilustra transfigurarea. Iată aşadar că geometria demodată a triunghiului a migrat, aşa cum spunea Philip Davis, către un alt domeniu: către geometria comparației, care e un capitol al geometriei riemanniene. Nu e vorba de o simplă trecere a modei sau de o schimbare a gusturilor, ci de o altă paradigmă.

O prezență: Laurențiu Panaitopol

Există întâlniri memorabile care ne influențează în mod esențial, şi aş dori să amintesc aici o experiență personală care nu ar putea fi descrisă altfel. Prima mea amintire asociază numele lui Laurențiu Panaitopol nu unui chip, aşa cum se întâmplă în cazul întâlnirilor obişnuite, ci unei configurații geometrice. Semnătura lui se regăsea sub o problemă de olimpiadă de clasa a IX-a cu care m-am

înfruntat într-o dimineață de martie. Ca orice începător, pe atunci nu-mi găseam calea în labirinturi. La următoarele întâlniri cu problemele atât de singulare şi de atent elaborate care purtau marca Laurențiu Panaitopol am ieşit ceva mai bine. Dar nu problemele de olimpiadă sunt experiența cea mai memorabilă legată de matematică din anii mei de liceu; partea mult mai interesantă era pregătirea propriu-zisă a olimpiadelor. Elevii bucureşteni beneficiau de un avantaj notabil: după faza județeană a olimpiadelor, celor calificați pentru faza finală le era propusă o pregătire sistematică la Universitate. În acest context m-am întâlnit prima dată cu L. Panaitopol, în sala de lângă Catedra de Algebră, de la etajul doi al Facultății de Matematică; a lucrat de mai multe ori cu cei cinci elevi de clasa a XI-a care aveau să reprezinte Bucureştiul la faza finală a olimpiadei de matematică din 1987, în şedințe de câte două ore, cu aceeaşi grijă cu care l-am văzut mai târziu prezentându-şi cursurile în fața unor amfiteatre pline. Două lucruri m-au impresionat atunci: modestia lui şi extraordinara lui cultură de probleme de conținut şi strategie singulară, probleme în care un matematician neavizat ar fi văzut doar cazuri particulare izolate. Era nu doar o adevărată enciclopedie, dar şi un rezolvator de mare perspicacitate.

După septembrie 1989, când am devenit student la Facultatea de Matematică din Bucureşti, ne-am întâlnit de câteva ori, dar nu în cadrul formal al lucrului la curs; odată ne-am întâlnit la sala de lectură, lângă colecția revistei *American Mathematical Monthly*. Trei ani mai târziu am luat cursul (obligatoriu pe atunci) de *Metodica predării matematicii* pe care-l preda L. Panaitopol. A fost un curs neobişnuit, pregătit de un artizan al problemelor unice şi desfăşurat în cadrul academic în care calitatea profesorului se vedea cel mai bine. Astfel de cursuri, aveam să descopăr mai târziu, depind de cel care le predă şi, de fapt, nu pot fi predate de oricine. Cursul era constituit dintr-o colecție de perle matematice aşezate într-o ordine narativă sugerată de dinamica tehnicilor de rezolvare sau potrivit logicii capitolelor discutate, totul expus la tablă cu o impecabilă organizare a prezentării şi cu o artă a retoricii egală cu a celor mai buni dintre matematicienii înzestrați pentru asta (ca de exemplu dl Ieronim Mihăilă sau dl Solomon Marcus). Mi-a plăcut cursul acela şi pentru că exista o compatibilitate de viziune între cel care preda şi valorile pe care le căutam eu în matematici. În vara lui 1995, după ce am absolvit programul de master de geometrie, dl Panaitopol mi-a propus să susțin seminarul pentru cursul lui de metodică.

În contextul acelor discuții l-am întrebat ce înseamnă, de fapt, metodica predării matematicii şi ce anume ar trebui prezentat la acel curs (pe care îl ştiam deja). Mă interesa raționamentul din spatele punctului de vedere care condusese la elaborarea cursului, aşa cum m-ar putea interesa momentul când unui romancier i-a venit ideea să scrie o anume carte. Mi-a răspuns că ideal ar fi să prezentăm modele de expunere a unor subiecte fundamentale şi să le dublăm atât la curs, cât şi la seminar cu exemple care să ilustreze cât mai complet tehnicile de demonstrație şi de raționament întâlnite în fiecare capitol discutat. Fie că e vorba de combinatorică, de geometria triunghiului, de teoria numerelor sau de teoria grupurilor, fiecare dintre unitățile pe care le prezentăm studenților trebuie să fie o poveste rotundă, cât mai completă posibil, cu exemple aşezate în ordinea crescătoare a dificultății, care să introducă audiența în subiect până la nivelul dorit de profunzime.

Te gândeşti dinainte unde vrei să ajungi, mi-a sugerat, apoi cauți cele mai elocvente exemple care, în doar două ore de curs, să te poarte de la aspectul introductiv până la rezultatul dorit. Secretul unui curs perfect nu stătea aşadar în faptul că L. Panaitopol era un vorbitor desăvârşit, ajutat de o dicție şi o prezență care şi-ar fi avut

locul pe scenă, ci în elaborarea cursului, deloc banală şi care părea atât de naturală încât, după ce îl auzeai vorbind, ţi se părea că văzuse şi cea mai potrivită formă de a introduce, justifica şi expune subiectul respectiv. În toamna aceea mi-a povestit mai multe episoade din istoria lui personală, despre tatăl său, care fusese ofiţer în garda regală, precum şi despre originea interesului pe care-l avea pentru problemele elementare, pentru problemele de olimpiadă, între altele. În fapt, era vorba de acel interes autentic faţă de fundamentele matematicii care urma tradiţia practicată la Universitatea din Bucureşti de pe vremea lui Gh. Ţiţeica şi D. Barbilian. Astăzi înţeleg mai bine faptul că o idee poate să fie fundamentală fără a fi elementară şi, rememorând acel curs, înţeleg viziunea celui care-l concepuse şi care a generat atâtea cărţi şi manuale care sunt folosite şi azi în România. Dintr-o viziune ca aceasta au izvorât problemele create de Laurenţiu Panaitopol şi care au fost propuse de mai multe ori de România la olimpiadele internaţionale de matematică. E vorba de un matematician care a scris multe articole interesante; baza de date *Mathematical Reviews* înregistrează pentru autorul L. Panaitopol un număr de 77 de articole. Dacă ar fi să aleg dintre toate acestea pe cel care îmi place cel mai mult, aş aminti aici

articolul publicat în 1994 în *American Mathematical Monthly*, scris împreună cu dl Petru Mironescu (în prezent la Universitatea Claude Bernard Lyon 1), în care se demonstrează existența unui unic triunghi cu lungimile bisectoarelor date. Oricât de elementar ar părea enunțul, problema aceasta rămăsese deschisă cel puțin din 1875. Am văzut acea notă la un an de la apariție şi soluția mi s-a părut de o ingeniozitate care ține de domeniul surprizei. Şi cine ar îndrăzni să spună că e simplă o demonstrație care a eludat lumea matematicienilor vreme de mai bine de un veac?

Laurențiu Panaitopol s-a stins în noiembrie 2008. Îmi amintesc de prezența lui ori de câte ori, pregătindu-mi cursurile, mă gândesc cum ar trebui prezentat studenților un pas dificil.

Povestind matematica în vremuri schimbătoare

Ştiam foarte bine cine este profesorul Solomon Marcus înainte să devin student al Facultății de Matematică bucureştene, în toamna anului 1989. Citisem *Şocul matematicii* de cum a apărut şi tot atunci, cu doi ani înainte să devin student, citisem câteva capitole ale *Poeticii*

matematice. Cursul nostru de analiză matematică din semestrul de toamnă al anului 1989 era programat în amfiteatrul „Simion Stoilow”, cel situat la etajul întâi al clădirii, pe colțul dintre Strada Academiei şi bulevard. Atunci când ne-a venit rândul, în prima săptămână a şcolii, am intrat în amfiteatru după o altă serie de studenți, care tocmai încheiase un curs de algebră. Purtam cu noi entuziasmul oricărui început de drum. Eu m-am aşezat undeva către fundul sălii, de unde aveam o vedere de perspectivă asupra celor trei grupe, a celor 90 de studenți care aveau să-mi fie colegi în următorii doi ani. O bună parte dintre ei îmi erau cunoscuți: ne ştiam fie de la olimpiadele de matematică, fie de la taberele *Gazetei matematice*, fie de la cercul de matematică din Bucureşti, pe care-l frecventasem vreme de doi ani.

Abia atunci când profesorul Solomon Marcus a intrat în amfiteatru s-a făcut linişte. A urcat pe podium, ne-a privit, ne-a salutat. Apoi ne-a spus că amfiteatrul nu este încă pregătit de curs, şi a zis asta arătând tabla care era acoperită de miriade de expresii algebrice rămase de la cursul precedent. Şi a adăugat că revine în cinci minute, lăsându-ne timp să ne pregătim pentru expunere. Imediat ce a părăsit amfiteatrul, câțiva dintre noi am venit la tablă şi am şters-o. Atunci când a revenit, cursul a putut

începe. Cred că intrarea aceea în scenă a fost făcută sub forma unei clare definiri a ținutei momentului, căci nu despre vanitate fusese vorba, ci despre necesara respectare a unor roluri şi a unui stil de a privi ceea ce însemna, de fapt, acel curs. În fond, noi reprezentam Universitatea Bucureşti, nu-i aşa? Astăzi, ştiind mai multe despre câte fapte matematice s-au întâmplat în ultima sută de ani în acel amfiteatru, înțeleg foarte bine ce încerca să ne comunice profesorul Solomon Marcus încă din primul minut. Se aştepta de la noi respect față de tradiția Universității Bucureşti, față de ideea de curs, față de conținutul ce urma să fie prezentat. Această idee de respect avea să domnească şi-n continuare, în fiecare nuanță a cursului pe care l-am trăit cu maximă intensitate; în fapt, a fost cursul care m-a adus din fundul sălii, din locul retras unde mă izolasem în primele minute, undeva spre rândul doi, de unde voiam să văd şi să aud mai bine.

Era o clară diferență între ceea ce profesorul Solomon Marcus îşi propunea într-un curs destinat studenților de anul I şi ceea ce am văzut în decursul anilor la alți profesori. Era o diferență de abordare şi de perspectivă. Să luăm de pildă faptul că fiecare teoremă era însoțită la curs de istoria ei, într-un stil care aminteşte de structura cărții

lui Dirk Struik *Lectures on Classical Differential Geometry.* Ca să faci aşa ceva ai nevoie de experienţă şi de erudiţie, iar la Universitatea Bucureşti nu s-au aflat, cel puţin pentru generaţia mea, decât doi profesori care puteau susţine un demers de o asemenea amplitudine: Solomon Marcus şi Ieronim Mihăilă, ambii redutabili în erudiţie, familiarizaţi până la detaliu cu lucrul pe textele-sursă ale domeniului studiat. O asemenea prezentare ţine de tot ce are mai bun arta narativă. Nu poţi prezenta la curs istoria în manieră anecdotică, nu poţi trasa istoria ideilor în chip de notă de subsol; demersul trebuie să fie consistent şi sistematic, pentru a se înălţa până la nivelul unui discurs complementar filonului pur matematic. Abia atunci matematica şi istoria ideilor care o susţin pot fi prezentate în paralel şi pot transforma un simplu curs de anul I într-o experienţă formativă memorabilă.

Şi mai era ceva. Pe lângă perspectiva istorică asupra subiectului, cursul nostru de analiză matematică de anul I conţinea şi o deschidere spre cercetare pe care abia cursurile de anii IV sau V se încumetau s-o exploreze. Sunt multe cursuri, pretutindeni în lume, care nu prezintă studenţilor o perspectivă spre cercetare; dacă eşti atent şi bine informat, poţi face asta şi la cursuri de nivel introductiv. Imediat după ce prezenta câte o teoremă,

profesorul Solomon Marcus menționa: în legătură cu această chestiune, rămâne necunoscut faptul că... şi urma enunțul câte unei întrebări care-şi aştepta decriptarea. Jocul a început chiar din prima săptămână şi menționarea problemelor deschise a continuat până la finele anului universitar, în iunie 1990. A fost un regal de probleme de cercetare. Prin opțiunea aceasta, cursul profesorului Solomon Marcus ne oferea tot ce avea mai bun tradiția Universității Bucureşti: un spirit academic deschis spre munca de cercetare fundamentală, cu noutatea de excepție că discursul acela era prezentat studenților de anul I. Căci era adevărat că rostul nostru era să păstrăm memoria informației ştiințifice, să învățăm vechile teoreme, dar mai rămânea ceva. Matematica se face rezolvând probleme, avansând sistematic spre partea neştiută a teoriei, izolând-o de rest, pregătind abordarea teritoriului necunoscut cu suficient exercițiu şi suficientă muncă de rutină menită să antreneze experiența necesară pentru descoperirea soluției. Cum să predai aşa ceva studenților? Cum să le transmiți acea nevoie de explorare a teritoriilor dificile? Cum să transmiți nelinişstea de a continua o investigație? Profesorul Solomon Marcus propunea o soluție precisă tuturor acestor întrebări prin filozofia implicită acelui curs, iar soluția aceasta a fost de

departe cel mai închegat curs introductiv într-un domeniu fundamental pe care l-am văzut vreodată (şi mi-am petrecut doisprezece ani ca student, luând cursuri întâi la Universitatea Bucureşti şi apoi la Michigan State University). Câțiva ani mai târziu am văzut un format similar într-un curs cu intenție introductivă pe care profesorul David E. Blair îl prezenta studenților de la Michigan State University; din acel curs s-a născut volumul *Inversion Theory and Conformal Mapping* (publicat de American Mathematical Society în 2000), elaborat în jurul unor teme clasice şi încorporând discuția pe text a unui articol al lui C. Carathéodory. Acest stil de a gândi un curs e rar. El izbuteşte să reunească nu doar cuprinderea istoriei temei, ci şi motivarea unor idei de cercetare actuale.

Am păstrat ideea aceasta în cursurile mele, cele pe care le prezint azi. Fie că predau fundamentele geometriei, geometria diferențială a curbelor şi suprafețelor, calcul diferențial cu mai multe variabile sau geometrie riemanniană, structura a ceea ce prezint la curs reprezintă o naturală combinație a ceea ce am văzut în cele mai bune cursuri pe care le-am urmat. Dar neîndoielnic, tiparul de bază al discursului meu de azi e inspirat de acel curs de

introducere în analiza matematică pe care l-am urmat în anul universitar 1989-1990.

A fost un an intens, în care o lume veche s-a dărâmat şi o lume nouă a început să se închege. Îmi aduc aminte de manifestațiile din Piața Universității, de venirile minerilor în Bucureşti. Contemporan atâtor evenimente tulburătoare care generau schimbări politice, cursul nostru de analiză matematică înainta ca un teritoriu ferm al certitudinilor şi preciziei, antipodal agitațiilor şi tensiunii sociale. Într-una dintre serile de primăvară din 1990 am participat la o manifestație în Piața Victoriei. Au fost câteva scene de controverse politice purtate în stradă, genul de episod pe care azi nu mi-l imaginez desfăşurându-se decât în iad. Seara, m-am întors acasă şi am continuat să citesc despre formulele lui Stokes şi Gauss-Ostrogradski. Treceam printr-o experiență academică ce se convertea într-o profundă experiență personală. Pentru mine, cel care studia în anul I la Universitatea Bucureşti, prilejul unor reflecții asupra opțiunilor mele profesionale nu a fost dat de cursul de geometrie, nici de cel de algebră sau de fundamente ale informaticii, ci de cursul de analiză. Nu poți trece printr-o asemenea experiență universitară fără să-ți pui problema

sensului pe care-l au pe lumea asta şi efemeridele politice. Atunci când frământările politice sunt aşezate faţă în faţă cu momentele de consistenţă matematică ale trecutului, nu se poate să nu te întrebi care este locul tău între toate acestea. Cred că în toamna anului 1989 nu ştiam încă să gândesc. Abia interacţiunea mea cu tot ce avea mai bun Universitatea Bucureşti m-a învăţat asta şi m-a ajutat să aleg.

Nu e vorba doar de forma universului, ci şi de logica lui

> „J'exigerais de ceux qui vont contre le train commun et les grandes règles qu'ils sussent plus que les autres, qu'ils eussent des raisons claires, et de ces arguments qui emportent conviction."

Jean de
La Bruyère,
Les
Caractères

Bine povestită, geometria poate arunca o lumină întregitoare asupra unei importante părți a umanioarelor. Am întâlnit prima oară această idee în cartea lui Marvin Jay Greenberg *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*, a cărei a treia ediție (ajunsă la al optulea tiraj) mi s-a părut a fi una dintre cele mai frumoase cărți de geometrie scrise vreodată[59]. Lucrarea era folosită ca manual pentru cursul de fundamentele geometriei atunci când eu am devenit student la Michigan State, în 1996, şi ştiu că era folosită ca manual şi de multe alte cursuri similare din Statele Unite[60]. În prefață, Greenberg scrie: „Cartea mea a evoluat dintr-un curs de geometrie pentru arte liberale pe care l-am predat la University of California, Santa Cruz, la începutul anilor

[59] Între timp a apărut şi ediția a patra, iar preferințele mele se extind şi asupra ei.

[60] Nu am predat acel curs la Michigan State, el era predat de profesorul John D. McCarthy. Dar n-am rezistat să nu răsfoiesc manualul încă din prima mea săptămână la East Lansing.

şaptezeci, când acel campus era pătruns de un idealism îmbucurător şi de experimentalism”. Greenberg deplânge faptul că sunt tot mai rare abordările interdisciplinare, cum ar fi de pildă cartea lui Ralph Abraham *Chaos, Gaia, Eros*. Astfel de abordări sugerează, în viziunea lui Greenberg, „o nevoie reală de a «umaniza» textele şi cursurile de matematică”. Fireşte că are dreptate şi că dorința aceasta e la fel de utilă azi cum era şi atunci când a fost scrisă prima versiune a cărții sale. Sunt domenii întregi pentru care ar mai fi atâtea de făcut, în sensul explicării pe înțelesul oricui a rezultatelor teoretice importante obținute. Geometria e la fel de importantă ca, de pildă, filozofia sau istoria, pentru că pe teritoriul acestei discipline putem trasa istoria unor teme care țin de evoluția logicii, alături de evoluția viziunii noastre despre spațiu şi timp. Şi asta nu e tot, pentru că Greenberg continuă cu o imagine a cursurilor pe care le ținea şi care ne arată ce aplicații ar putea avea această viziune în domeniul educației: „Când am predat calcul diferențial recent, am fost uimit să văd cu cât mai plini de viață devin studenții (în majoritatea lor nematematicieni) după ce au cercetat şi au scris eseuri despre istoria calculului diferențial (mulți erau fascinați de personalitatea lui Isaac Newton), despre relevanța calculului diferențial pentru

domeniile lor şi despre teama lor faţă de acest subiect extraordinar".

Chiar aşa. În fond, dacă ne e teamă de un subiect matematic, de ce anume ne-ar fi teamă? Poate de faptul că nu înţelegem calculele, că manipulările algebrice sunt obscure, că toate acele aşa-numite simplificări ale conceptelor ar putea fi în cele din urmă complicate. Dar în spatele oricărui calcul se află ideea, şi până la urmă asta e tot ce contează[61]. În momentul în care vedem ideea, suntem pregătiţi şi să acceptăm un calcul mai puţin plăcut, numai de dragul ideii. Suntem gata să ne împăcăm cu etapele necesare ale tehnicalităţii, numai pentru a înţelege conceptul în toată profunzimea lui. Iar ideea respectivă poate foarte bine să nu fie relevantă doar în sens tehnic, ci şi într-un sens mai larg, „umanist". În fond, în întreaga istorie a culturii, istoria geometriei are un avantaj neegalat de nici un alt domeniu: aduce imagini, figuri, configuraţii, ne permite să ne punem la lucru intuiţia şi să vedem. Bătălia pentru înţelegerea formei a fost un lung drum al culturii, început acum mai bine de două mii de ani.

---

[61] Fraza asta mi-a fost spusă chiar în această formă în 1993 de profesorul Stere Ianuş, atunci când mi-a sugerat să citesc o întreagă carte de Barrett O'Neill. M-am speriat atât de tare de sugestie, încât îmi amintesc integral discuţia.

Să ne întoarcem aşadar la cartea lui Greenberg. Ceea ce este extraordinar la o carte care serveşte în acelaşi timp şi ca manual e faptul că poate fi citită ca o lectură lejeră, tocmai pentru că e plină de informaţii istorice şi fapte reale. În acelaşi timp, joaca e serioasă: în volumul respectiv se studiază o versiune a sistemului axiomatic al lui David Hilbert. E o experienţă universitară plină de conţinut. Tăria textului nu constă în faptul că e plin de interesante divagaţii. Dacă ar fi numai atât, nici n-ar merita menţionat. Volumul se ridică la nivelul exigenţelor pe care orice cercetător din domeniu le-ar putea avea pentru o solidă introducere în axiomatică, dar ajunge şi la o extraordinară lizibilitate tocmai pentru că biografiile, faptele autentice, conexiunile între figurile importante ale trecutului sunt inserate în text în mod firesc, destinele se leagă de idei, ca în scrierile lui Plutarh. Şi am văzut: un astfel de text poate fi predat unor studenţi care nu sunt numaidecât matematicieni.

Nu-i aşa că e extraordinar un program universitar cu o asemenea deschidere interdisciplinară? Oare cum ar fi studiile în drept dacă cei care le-ar urma ar beneficia de un curs de logică incluzând şi aspecte de axiomatică, ceva care să educe, să pregătească pentru bătălia cu raţionamente dificile? Şi oare cât de mult ar beneficia

studenții de la istorie sau de la filozofie dacă ar trece prin experiența textelor fundamentale ale geometriei, cele care au trasat, vreme de secole, istoria celor mai mari neînțelegeri, dar şi a celor mai surprinzătoare iluminări?

*

Istoria matematicii atinge inevitabil aspecte tehnice, calculatorii, şi nu poate fi prezentată decât publicului specializat. Pe de altă parte, istoria geometriei e atât de *vizuală* încât poate fi povestită, făcând apel la descrieri, eventual la suport grafic. E atât de vizuală încât poate fi narată pe figuri. Lupta oamenilor de a înțelege forma a lăsat urme care sunt fragmente de epopee.

*

Vreme de două mii de ani, cea mai influentă referință în fundamentele geometriei au fost clasicele *Elemente* ale lui Euclid. Scrisă probabil la finele secolului al IV-lea î.Hr., lucrarea a circulat nu doar în Antichitate, dar şi în Evul Mediu, iar revoluția ideilor din perioada lui János Bolyai şi a lui N. Lobacevski a avut loc înainte ca fundamentele

geometriei să fie reclădite din temelii în timpul transformării moderniste a matematicilor de la finele secolului al XIX-lea. Cartea lui Euclid era cea care se studia atunci când era vorba de geometrie în universitățile europene, de cele mai multe ori discuțiile fiind inspirate de originalul grec al textului. Chiar şi astăzi există cursuri universitare care, fie la fundamentele matematicii, fie în cadrul cursurilor de istorie a matematicii, discută pe text cartea lui Euclid. În Statele Unite există o ediție Dover care pune textul la îndemâna oricui.

Elementele conțin prima construcție care poate fi considerată drept sistem axiomatic. Unii autori vorbesc despre *metoda axiomatică*, înțelegând prin aceasta construirea unei teorii pe baza unor principii fundamentale, numite axiome. Problema e că sistemul axiomatic al lui Euclid are unele fisuri de natură logică. Înainte de a le descrie şi înainte de a povesti despre revoluția în domeniul axiomaticii pe care critica sistemului lui Euclid a generat-o, să descriem pe scurt structura sistemului axiomatic prezentat în *Elementele* lui Euclid. Nu sistemul lui Euclid e cel pe care-l studiem în şcoala elementară sau în liceu.

Structura sistemului axiomatic al lui Euclid porneşte de la cinci postulate şi cinci axiome. În Cartea I a

Elementelor apar şi 23 de definiții. Cele cinci axiome ascund principii care astăzi țin mai degrabă de câmpul algebrei:

„1. Lucruri care sunt egale cu acelaşi lucru sunt egale unul cu celălalt.
2. Dacă măsuri egale sunt adunate la măsuri egale, sumele obținute vor fi egale.
3. Dacă măsuri egale sunt scăzute din măsuri egale, rezultatele obținute vor fi egale.
4. Lucruri care coincid unul cu celălalt sunt egale unul cu celălalt.
5. Întregul e mai mare decât partea”.

Cele cinci postulate sunt presupunerile fundamentale ale geometriei. În primele trei postulate, presupunem că ştim să facem următoarele operațiuni geometrice:

„1. Să desenăm o linie dreaptă din orice punct către orice punct.
2. Să extindem o linie dreaptă finită continuu în linie dreaptă.
3. Să descriem un cerc cu orice centru şi orice distanță [ca rază]”.

Ultimele două postulate sunt:

„4. Unghiurile drepte sunt egale unul cu celălalt.

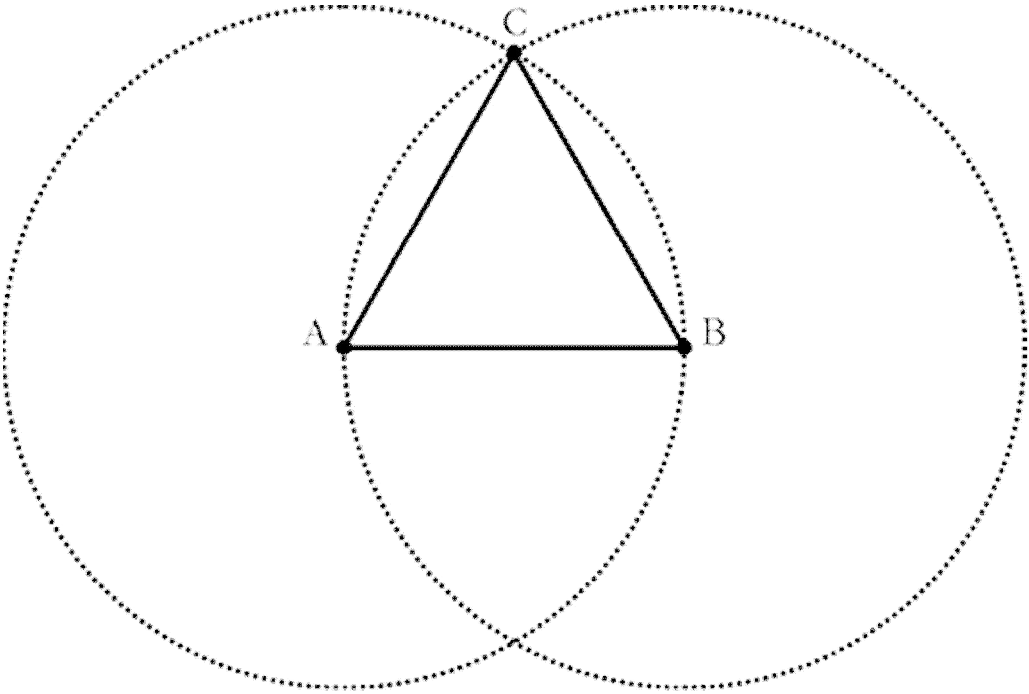
5. Dacă o dreaptă intersectează alte două drepte în aşa fel încât suma unghiurilor interioare situate de aceeaşi parte este strict mai mică decât suma a două unghiuri drepte, atunci cele două drepte, dacă sunt extinse, se întâlnesc de partea în care unghiurile sunt strict mai mici decât două unghiuri drepte".

Acest din urmă postulat e cel pe care unii geometri, începând cu Proclus şi continuând cu Saccheri şi Legendre, au încercat să-l demonstreze. Lungă e istoria nefericitelor încercări de a demonstra ceea ce nu se poate demonstra.

În fond, care au fost lacunele logice identificate în sistemul axiomatic al lui Euclid? Întâi de toate, un sistem axiomatic care să răspundă tuturor exigenţelor ar trebui ca, pe baza celor zece principii enunţate mai sus, să poată demonstra orice propoziţie şi-ar propune în geometria elementară. Demonstraţiile ar trebui să nu prezinte lacune şi să cuprindă între ipoteze numai principiile enunţate mai sus sau consecinţele lor. Iată însă ce se întâmplă în Cartea I, chiar în Propoziţia 1, al cărei enunţ e următorul: „Pe o linie dreaptă finită să se construiască un triunghi echilateral".

Pentru demonstraţie (vezi figura), Euclid consideră segmentul *AB* şi, cu centrul *A* şi raza *AB*, se construieşte

un cerc. Din nou, cu centrul *B* şi raza *BA* (conform axiomei 4, e aceeaşi lungime ca şi *AB*), se construieşte un cerc. Cele două cercuri se taie în *C.* Atunci triunghiul *ABC* este echilateral, pentru că raza *AB* este egală cu celelalte raze, *AC* în primul cerc şi *BC* în cel de-al doilea.



E o primă demonstrație ingenioasă dintr-un lung şir de construcții care pun în evidență o imaginație interesantă. Este extraordinar faptul că Euclid nu a admis drept evidentă construcția triunghiului echilateral, ci a înțeles

că acest lucru trebuie demonstrat pe baza principiilor enunțate. De fapt, în această idee e tot spiritul metodei axiomatice, şi vedem că Euclid avea o idee foarte clară despre ceea ce face. Dar demonstrația conține o lacună: admite fără demonstrație faptul că cele două cercuri se intersectează. Fireşte, intuiția ne îndeamnă să privim cele două cercuri ca pe nişte obiecte fizice. Privim figura şi spunem: trebuie să se intersecteze! Da, dar aici ne aflăm pe teritoriul fundamentelor geometriei, iar cele două cercuri sunt nişte entități abstracte, ale căror proprietăți trebuie să decurgă din cele cinci axiome şi din cele cinci postulate. Or, existența acelei intersecții nu e asigurată de raționamentul prezentat de Euclid. Ar trebui demonstrat că intersecția există. Pentru o demonstrație completă ar fi nevoie de o bună înțelegere a conceptului de continuitate, care a fost bine asimilat şi bine înțeles abia către finele secolului al XIX-lea.

Un contraexemplu se poate construi imediat. Dacă ne propunem să lucrăm în planul rațional, cel dat de produsul cartezian al mulțimii numerelor raționale cu ea însăşi, şi dacă vom considera cercurile de centre (0,0) şi (1,0) şi de rază 1, atunci când calculăm coordonatele intersecțiilor obținem că una dintre coordonate e un

număr irațional. Astfel, punctul de intersecție al celor două cercuri nu se află în planul rațional.

Mai departe, Propoziția 1, a cărei demonstrație conține lacuna descrisă mai sus, e folosită pentru a demonstra Propoziția 2: „Să se construiască într-un punct dat (ca extremitate) o linie dreaptă egală cu o linie dreaptă dată”. O demonstrație mult mai simplă e necesară pentru a demonstra Propoziția 3, acolo unde Euclid îşi propune ca, „dacă se consideră două linii drepte care nu sunt egale, să se taie din cea mai lungă o linie dreaptă egală cu cea mai scurtă”. În fine, după aceste două rezultate a căror demonstrație e corectă, Euclid enunță Propoziția 4, în a cărei demonstrație apare din nou o lacună de factură logică.

Enunțul ei este următorul: „Dacă două triunghiuri au două laturi egale cu două laturi corespondente şi au unghiurile conținute între laturile egale la rândul lor egale, ele vor avea şi bazele egale între ele. Astfel, triunghiurile vor fi egale între ele, iar unghiurile rămase vor fi egale între ele”.

Recunoaştem aici cazul de congruență latură-unghi-latură al triunghiurilor.

Ei bine, demonstrația lui Euclid nu e perfectă. Iată cum decurge. Se consideră triunghiurile *ABC* şi *DEF* şi se

presupune că *AB* e egal cu *DE*, iar *AC* e egal cu *DF*, în timp ce unghiul *A* din primul triunghi e egal cu unghiul *D* din al doilea.

Apoi Euclid ia triunghiul *DEF* şi îl „aşază” deasupra triunghiului *ABC*, mai precis *D* deasupra lui *A.* Pentru că *AB* e egal cu *DE*, prin presupunerea pe care am făcut-o mai înainte, *E* se va „aşeza” deasupra lui *B.* Cum unghiul *A* din primul triunghi este egal cu unghiul *D* din al doilea, direcția în care vine linia dreaptă *AC* trebuie să coincidă cu direcția în care pleacă *DF.* Aşadar, *F* trebuie să se „aşeze” deasupra punctului *C.* Or, dacă *B* se suprapune lui *E*, iar *C* se suprapune lui *F*, atunci linia dreaptă finită *BC* trebuie să coincidă cu *EF*, deci ele trebuie să fie egale.

Problema acestei demonstrații se vede de la început: nimic din postulate nu ne-a pregătit să „aşezăm” un triunghi deasupra celuilalt. Ceea ce pare o construcție ingenioasă care merge în direcția soluției este de fapt un argument cu o mare lacună. Dacă ne propunem o demonstrație perfectă, atunci demonstrația aceasta n-ar trebui să suscite întrebări fără răspuns.

Acestea sunt două dintre problemele cu care se confruntă sistemul axiomatic al lui Euclid.

Începând cu secolul al XIX-lea, mulți autori au început să critice şi să pună sub semnul întrebării *Elementele* lui

Euclid. Fireşte, astăzi acest prim sistem axiomatic ni se pare extraordinar pentru momentul când a fost conceput, dar, din pricina lacunelor amintite mai sus, nu mai răspunde exigenţelor din prezent. Faptul că azi putem spera să gândim corect aceste lucruri se datorează evoluţiei ideilor din fundamentele geometriei din a doua jumătate a secolului al XIX-lea şi schimbărilor produse în perioada istorică numită transformarea modernistă a matematicii.

Cineva trebuia să vină şi să descompună realitatea în atomi. Mai precis, trebuiau identificate exact acele principii geometrice fundamentale care, odată enunţate, ar fi asigurat că următoarele demonstraţii sunt impecabile. Era un proces laborios, bazat pe multă intuiţie şi pe metoda „încearcă-şi-verifică". Acolo, în aria fundamentelor, nu se putea nici calcula, nici cuantifica, iar construcţia prezenta o dificultate de o natură cu totul diferită decât în domeniul algebrei: aici era provocarea logicii.

*

Ce rost au matematicienii pe lumea aceasta? Fie şi numai să reamintească ce înseamnă un raţionament corect pe baza unor principii, şi tot şi-ar justifica

utilitatea. Rostul matematicienilor este de a echilibra realitatea, după ce oamenii politici, administratorii, personajele cu îndreptățire de a discuta chestiuni religioase şi agenții de publicitate spun minciuni. Când povestim despre drepte, triunghiuri şi cercuri, în subtext nu despre asta e vorba, ci despre una dintre cele mai vechi năzuințe umane: de a trăi într-o lume în care lucrurile să fie atât de clare precum într-un sistem axiomatic perfect. Nu ştim dacă s-ar putea ca în vreo societate lucrurile să meargă aşa, dacă ar fi posibil ca justiția să funcționeze fără greşeală şi să opereze pe baze logice, la toate nivelurile. Ştim că viața e nedreaptă[62], ştim că pot să apară crize naturale, politice sau economice care ne scapă de sub control. De ce n-am arunca o privire către imaginea unei lumi perfecte, spre perspectiva unui univers pe care l-am putea controla cu raționamente şi care, de-am fi într-un vis de copil, ar fi plin de onestitate şi justețe. Am vedea o lume ideală, organizată de-a lungul unor teme fundamentale, născute din necesitățile formelor universului. Am vedea poliedre ale căror fațete ar fi poligoane regulate, toate inscriptibile în sfere ce ne-ar fi accesibile prin calcul şi raționament. Munții s-ar ridica spre cer precum turnuri de diamante, dodecaedre

[62] A zis-o Bill Gates.

susținând cuburi, şi ar reflecta stele fixe, etern aşezate pe un firmament configurat de-a lungul unei latice cu coordonate numere întregi.

E greu de descris câtă suferință produc unei minți obişnuite cu rigoarea oamenii politici care vorbesc despre probe, despre dovezi, despre argumente – dar ceea ce prezintă ei nu se susține, iar argumentele la care recurg ei nu vizează fondul problemei. Lumea reală nu se apropie de rigoarea lumilor unde s-a născut şi se aplică metoda axiomatică. Sunt momente în viața oricărui cetățean onest al lumii reale când accesarea ştirilor este echivalentă cu o insultă la adresa logicii. Atunci când minciunile sunt evidente, când discrepanțele dintre teritoriul unde te-ai antrenat şi adevărurile lumii reale devin stridente, durerea pe care o resimți nu e diferită de durerea fizică. Te poți imuniza treptat: odată cu trecerea anilor înveți să accepți această discrepanță, iar tot ce rămâne în urmă e regretul că tensiunile realității nu se tranşează pe teritoriul geometriei. Nu e un asemenea vis o dulce naivitate demnă de capturat într-un poem?

*

L-am amintit mai înainte pe David Hilbert, ultimul matematician care a avut o viziune cuprinzătoare asupra întregului câmp al matematicilor, posesorul unei culturi matematice ce îmbrățișa toate domeniile. Despre Hilbert, Dan Barbilian, care a urmat cu el cursul de fundamentele matematicilor în toamna anului universitar 1921, scrie astfel: „E sigur că Hilbert a fost un mare matematician. Dar felul său de a fi mare e puțin special. [...] Hilbert e arhitectul unei ordine hipogeene: un geniu al fundamentelor. Direcția lui de cercetare e involutivă. Chiar în faza lui creatoare, Hilbert nu descoperă *domenii*, ci inventează *sisteme*: metode şi maşini de demonstrație. În privința aceasta, credem că Hilbert înfățişează un tip matematic de decadență, de subtil sfârşit de cultură. Fondul lucrurilor îi este aproape indiferent, mai ales din momentul când se liberează de influența prieteniilor sale matematice şi se lasă în voia propriei genialități. Ceea ce Hilbert caută în matematice e dificultatea şi învingerea ei, pentru a crea într-însul acea beție specială, castă şi înlănțuitoare ca un opium: *starea de geometrie*”.

*

Şi acum portretul. David Hilbert s-a născut în 1862 la Königsberg, şi tot acolo a studiat la *gymnasium.* Studiile universitare le-a făcut la Universitatea din Königsberg, ca şi doctoratul, susținut în 1885 cu profesorul Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939).

David Hilbert a lucrat pentru Universitatea din Königsberg din 1886 şi până în 1895, când a plecat la Göttingen. Prima versiune a sistemului axiomatic al lui Hilbert a fost concepută în 1891, pentru semestrul de vară de la Universitatea din Königsberg, şi a rămas multă vreme în manuscris, sub titlul *Projektive Geometrie.* Punctul de plecare al construcției lui Hilbert au fost primele secțiuni ale manualului *Geometrie der Lage*, scris de Theodor Reye. Cu toate acestea, Hilbert a venit cu o interpretare personală, schimbând şi simplificând multe dintre demonstrații şi reordonând teoria într-o structură care i s-a părut mult mai potrivită. Ulterior, punctul de vedere personal avea să depăşească orice altă referință precedentă, iar sistemul axiomatic nu va mai arăta deloc precum cel al lui Euclid. Mai precis, Hilbert avea să revină asupra manuscrisului în 1893, când a pregătit, tot pentru Universitatea din Königsberg, un curs intitulat *Grundlagen der Geometrie*, dar care nu s-a ținut din pricina numărului

prea scăzut de studenți înscriși. Totuși, același curs avea să aibă loc la Königsberg în vara lui 1894, sub titlul *Über die Axiome der Geometrie.* Acesta avea să fie al șaselea curs de geometrie ținut de Hilbert în anul academic 1894, dar este primul curs pe care l-a susținut pe o temă propriu-zisă de *fundamentele geometriei.* Aveau să urmeze versiunile de la Göttingen, din 1896 și 1898, ale notelor de curs pentru așa-numitele cursuri de vacanță, iar în 1898-1899 o versiune mult mai aproape de forma finală, intitulată *Grundlagen der euklidischen Geometrie.* Finalmente, procesul de căutare și fixare a sistemului axiomatic a fost încheiat cu cele două versiuni intitulate la fel, *Grundlagen der Geometrie*, scrise în 1899 și, respectiv, 1902. Importanța acestui punct de vedere asupra domeniului a fost crucială: și astăzi există cursuri universitare, ca de exemplu cel al lui Greenberg, care sunt bazate pe un sistem axiomatic inspirat din construcția lui Hilbert.

Structura sistemului axiomatic al lui Hilbert este următoarea. Axiomele sunt împărțite în cinci clase. Primul set sunt axiomele de incidență, care statuează relațiile între puncte, drepte și plane. Apoi urmează axiomele de ordine, care se referă, între altele, la ordinea punctelor pe o dreaptă. Setul al treilea sunt axiomele de congruență,

între care şi cazul de congruenţă al triunghiurilor latură-unghi-latură, acolo unde am văzut că existase o lacună în sistemul axiomatic al lui Euclid. Cel de-al patrulea set e compus dintr-o singură axiomă, cea a paralelelor. În fine, al cincilea set de axiome se compune din două axiome ale continuităţii: una e aşa-numitul principiu al lui Arhimede, cealaltă e axioma completitudinii modelului.

Când Dan Barbilian a ajuns la Göttingen în 1921, David Hilbert încă mai preda despre asta, într-o formă de acum fixată a unui sistem axiomatic pe care geometrii din întreaga lume îl studiaseră, criticaseră, analizaseră şi, în cele din urmă, îl acceptaseră ca răspunzând ireproşabil provocării vechi de două mii de ani.

Ideea centrală a metodei axiomatice este că orice teorie matematică e construită dintr-un set de obiecte primare, care nu necesită definiţii, împreună cu un set de axiome. Teoria se construieşte apoi ca o colecţie de enunţuri matematice riguroase deduse din axiome sau folosind axiomele sau unele dintre consecinţele lor. Pentru geometrie, setul de obiecte primare poate fi diferit de la un sistem axiomatic la altul; felul cum construim atomii de informaţie e diferit, dar metoda rămâne. De exemplu, pentru sistemul axiomatic al lui Hilbert, noţiunile primare includ punctele, dreptele, planele. Se pot construi şi alte

sisteme axiomatice, cu alte puncte de plecare. Nu afirmăm că această construcție este unică, ci că marele merit al lui Hilbert este de a fi construit primul sistem axiomatic ireproşabil al geometriei plane.

Într-un portret literar dedicat lui Hilbert, Dan Barbilian scrie că originalitatea axiomatizării geometriei elementare, aşa cum i-o datorăm lui David Hilbert, constă în următoarele patru aspecte:

„1º. În enumerarea, pentru prima dată exhaustivă, a ipotezelor independente care stau la baza geometriei elementare.

2º. În conceperea lor ca simple relații logice – un punct de vedere opus empirismului lui Pasch –, a căror îndreptățire stă în demonstrația a priori a lipsei lor de contrazicere (sau a consistenței lor).

3º. În punerea problemei independenței axiomelor şi definirea acesteia ca o problemă particulară de consistență.

4º. În distincția pe care Hilbert nu o face explicit, dar pe care Fundamentele o implică, între problema metamatematică a categoricității, care revine la a stabili că orice enunț, angajând numai axiomele sistemului, e demonstrabil (adică adevărat sau fals), şi problema matematică a categoricității: toate dezvoltările logice posibile ale

sistemului sunt – sau pot deveni, cu preţul unor procese finite de extinderi – izomorfe între ele”.

*

Dacă la primul curs pe care l-a susţinut la Königsberg, în 1891, audienţa nu era compusă decât din doi studenţi înscrişi oficial, un deceniu mai târziu problema fundamentelor geometriei interesa mulţi matematicieni; mulţi au scris şi comentat lucrarea lui Hilbert. Miza era importantă: era vorba despre construirea unui sistem axiomatic compus din axiome independente, necontradictorii, adică perfect consistent logic. Între cei care au acceptat faptul că sistemul axiomatic propus de Hilbert constă în axiome independente (adică nici una dintre axiome nu decurge în mod logic din celelalte) s-au aflat Hölder şi Sommer, în timp ce Schur a afirmat că trei dintre axiomele versiunii din 1899 decurg din celelalte opt. Mai târziu, E.H. Moore a demonstrat că punctul de vedere al lui Schur era incorect. În 1904, Oswald Veblen a scris un text nu lipsit de nuanţe polemice, o lucrare izvorâtă din teza sa de doctorat, o construcţie alternativă a unui alt sistem axiomatic, diferit de cel al lui Hilbert. Mai precis, el a scris că îşi priveşte direcţia de cercetare drept o

continuare a muncii lui Pasch şi Peano, mai degrabă decât a lui Hilbert şi Pieri[63]. Ceva mai târziu, în 1912, R.L. Moore a demonstrat că unele dintre axiomele enunțate de Veblen în încercarea lui de a da o abordare alternativă fundamentelor geometriei decurg din celelalte.

Din toată această labirintică istorie, o concluzie se desprinde. E dificil să stabileşti fundamentele unui domeniu. Fie că e vorba de drept constituțional, de modele în ştiințele sociale, de considerente axiomatice despre structura universului, despre ipoteze fizice, e o chestiune de mare finețe să stabileşti principiile pe baza cărora funcționează domeniul respectiv. Orice construcție care ține de fundamente e expusă pericolului de a produce fisuri de natură logică. Dificultatea include şi identificarea particulelor logice care intră în componența sistemului. Dacă nu identifici corect dificultățile, rişti să încorporezi în demonstrații argumente incorecte, aşa cum a făcut Euclid. Şi lacunele pot sta la vedere foarte mult timp, fără ca nimeni să le observe, atât de subtile pot fi.

Pe de altă parte, pentru cercetătorul care studiază un ansamblu de principii şi relațiile dintre ele, cel puțin acolo unde este vorba de geometrie şi unde lucrurile pot fi „văzute”, geometria devine interesantă abia în părțile

[63] Veblen avea 23 de ani când şi-a susținut teza de doctorat.

teoriei unde sunt principii puține, unde balanța universurilor posibile se poate înclina în orice parte. Lumea respectivă ar putea fi altfel. Ca o ipotetică planetă unde lucrurile sunt învăluite în ceață şi sunt instabile, unde numai un pas desparte haosul de zona ordonată şi până atunci cunoscută. Aşa încep cercetările şi probabil asta îl atrăgea pe Hilbert. Ca geometru, abia în acele arii care necesită limpezire, clarificare, începi să devii realmente interesat. Un grăunte de curiozitate şi îndoială te aruncă mai departe: ce ar fi dacă? Intuiția anticipează, te atrage, te provoacă. Nu e o muncă similară unei activități ordonate, bună de încadrat într-un program, ci o activitate continuă, o obsesie insistentă, care ajunge să îți domine zilele şi nopțile. De la acel punct de plecare al intuiției, până şi cercetarea cea mai riguroasă îngăduie forme de imaginație similare celor pe care le mai cunoaşte şi poezia. Alteori, eforturile tale sunt dublate de orgoliu: dar dacă pe aici n-a mai trecut nimeni? Ce-ar fi dacă lucrurile acestea nu au mai fost considerate nici de Gauss, nici de Riemann, de nici una dintre umbrele tutelare? Îți imaginezi că aşa se simte aerul rarefiat al înălțimilor. Orgoliul acesta e nemăsurat şi, păcat sau nu, el devine parte a motivației. Eterna suferință a geometrului care studiază fundamentele geometriei e aceea când trebuie să

precizeze contextul în care aserțiunile intuite se mențin adevărate; abia aceea este proba adevărului, într-un cadru logic bine precizat. În detaliile tehnice, demersul e total diferit de cel poetic, cu care are comun cel mult punctul de pornire, intuiția care asociază lucruri aparent diferite, care arde etapele, care motivează printr-o viziune ce anticipează.

*

Au trecut câteva decenii înainte ca George D. Birkhoff să observe, în 1932, că încorporarea ideii de distanță în fundamentele geometriei simplifică foarte mult prezentarea subiectului. Iată ce scrie el: „Acum câțiva ani, încercând să prezint cele mai simple fapte geometrice într-o formă populară, am realizat cum geometria plană ar putea fi abordată mai uşor cu ajutorul conceptelor încorporate în riglă şi raportor. Scopul articolului de față e să prezinte setul corespunzător de axiome într-o formă matematică riguroasă. Din punct de vedere strict matematic, aceste postulate cu greu ar putea fi situate alături de alte sisteme axiomatice între care, numai în țara aceasta[64], le-am

[64] În Statele Unite.

putea aminti pe cele ale lui Veblen, Veblen şi Young, Schweitzer şi Huntington”.

Sistemul lui Birkhoff nu are decât patru axiome, mult mai puține decât sistemul axiomatic al lui Hilbert: cel al măsurii de-a lungul riglei, cel al incidenței (care descrie relația între dreaptă şi punct), cel al măsurii unghiului şi, oarecum surprinzător, cel al triunghiurilor asemenea (congruența triunghiurilor apare drept un caz particular de asemănare). De la sistemul axiomatic al lui Hilbert la cel al lui Birkhoff simplificarea e monumentală şi, prin această construcție, se deschidea posibilitatea ca fundamentele geometriei să poată fi prezentate publicului larg, inclusiv elevilor care studiază în liceu. De aceea, probabil, lucrarea lui Birkhoff a avut atât de mult succes după ce a fost publicată în una dintre cele mai prestigioase reviste ale momentului.

Motivul acestei simplificări e includerea în fundamentele geometriei a ideilor de distanță şi de măsură a unghiurilor. Sistemul axiomatic al lui Hilbert nu le-a inclus, pentru că țintea spre o geometrie „pură”, unde algebra să nu fie amestecată. Dar Birkhoff era interesat tocmai de accesibilitatea ideilor şi, în 1932, a fost dispus să renunțe la „puritatea” teoriei cu scopul de a o face mai uşor de înțeles.

Cititorul care va parcurge sistemul axiomatic al lui Birkhoff va descoperi o dificultate majoră, într-o zonă apropiată de începutul teoriei. Pe baza celor patru postulate, e destul de dificil să tratezi chestiunile legate de separare în plan. Mai precis, când anumite puncte sunt situate de o parte şi de alta a unei drepte. Pentru a decide în probleme legate de separare, Birkhoff foloseşte măsura unghiurilor. Problemele de situare în plan sunt transpuse în termeni de măsură. E mai uşor să măsori şi să compari decât să dezvolți raționamente complicate, eventual implicând mai multe cazuri. În sistemul axiomatic al lui Birkhoff sunt permise triunghiuri degenerate şi măsuri ale unghiurilor de 180 de grade; or, tocmai asta produce dificultăți în unele demonstrații. Cu o mică ajustare a teoriei aici, teoria s-ar fi putut simplifica şi mai mult.

*

Există două puncte de vedere esențial diferite privind predarea geometriei pe baza metodei axiomatice. Primul dintre ele urmează ideea lui Hilbert: geometria trebuie să aibă un sistem axiomatic cât mai independent, care să nu încorporeze numerele reale. Cel de-al doilea punct de vedere s-a dezvoltat plecând de la punctul de vedere al lui

Birkhoff: încorporând numerele reale în axiome, obținem o abordare mai simplă, ceva ce poate deveni foarte accesibil.

Din aceste rațiuni, la începutul anilor şaizeci a început să se dezvolte o preocupare constantă pentru integrarea punctului de vedere axiomatic în programa şcolară din liceele din Statele Unite. Este momentul când Saunders Mac Lane (1909-2005), unul dintre fondatorii teoriei categoriilor, a avut o contribuție esențială. Mac Lane intenționa să urmeze doctoratul la Universitatea din Chicago, dar, la începutul anilor treizeci, a descoperit că, cel puțin pe componenta de matematică, respectiva universitate se afla în declin, din pricina faptului că la ieşirea la pensie profesorii obişnuiau să-i angajeze în locul lor pe foştii lor studenți. Aşa că Mac Lane a plecat să-şi facă doctoratul la Göttingen, unde avea să-şi susțină teza în 1934. Acolo a studiat cu Paul Bernays (1888-1977), Emmy Noether (1882-1935) şi Hermann Weyl (1885-1955). Se spune că într-o seară, la operă, când a ieşit în foaier în pauza dintre acte, Mac Lane s-a trezit lângă Hitler şi Goebbels. Peste ani, avea să-i povestească lui Steven Krantz, în chip de anecdotă, că şi-ar fi dorit să fi avut la el un pistol.

Mac Lane a fost vicepreşedinte al Academiei Naționale de Ştiințe, al Societății Filozofice Americane, precum şi

preşedinte al American Mathematical Society. Pentru o vreme, în anii cincizeci, a fost preşedinte al Mathematical Association of America, al cărei principal obiectiv este îmbunătățirea calității învățământului. În perioada aceea a observat că anumite detalii ale sistemului axiomatic al lui Birkhoff ar putea fi făcute şi mai accesibile. Educat la Göttingen în spiritul recunoaşterii importanței fundamentelor matematicii, era la curent cu toată istoria domeniului şi avea toată competența şi viziunea să ducă la îndeplinire proiectul unui nou sistem axiomatic. Între alte importante modificări încorporate în construcția lui, Saunders Mac Lane a propus o versiune foarte utilă a aşa-numitei axiome de continuitate.

Peste câțiva ani, School Mathematics Study Group (pe scurt, SMSG) a produs un sistem axiomatic bazat pe ideile explorate de Birkhoff şi Mac Lane, iar pe baza acelor axiome a scris un manual care nu s-a difuzat decât în format şapirografiat. Dar, cu modificări minore față de acel sistem axiomatic, Edwin E. Moise a scris două volume care sunt folosite şi azi în sistemul de educație nord-american. Aceste cărți au inspirat apariția în diverse țări a unor manuale în care metoda axiomatică e prezentată pentru liceeni. Un astfel de manual a funcționat cu succes şi în România, în anii şaptezeci şi optzeci, şi a fost foarte

bun, dacă n-a fost cumva chiar manualul ideal de geometrie. Pe acea componentă, sistemul de educaţie românesc a înregistrat o reuşită, la care modificările ulterioare ale programei analitice au renunţat. Actualmente s-a renunţat la metoda axiomatică în favoarea unei abordări algebrizate, care nu acoperă aspectele logice ale studiului geometriei. E ca şi cum cineva şi-ar propune să predea zoologia fără să se refere vreodată la clasificarea animalelor, ci doar înşirându-le într-o ordine oarecare.

Ce ar fi de făcut? Ar fi excelent dacă s-ar reveni fie la acel manual românesc, fie la o traducere a manualului lui Edwin E. Moise. Ar mai fi un manual foarte bun care ar merita tradus în România, cel publicat în cadrul University of Chicago School Mathematics Project.

Aceste construcţii au fost rezultatul unei laborioase evoluţii care, după cum se vede, însumează eforturile unor minţi luminate, ce au reflectat atent asupra problemei vreme de multe decenii. Idei importante, şlefuite cu migală în timp, pot fi ocultate în numele unui pragmatism prost înţeles, dar preţul poate fi ridicat: sunt generaţii întregi de elevi care nu beneficiază de antrenamentul rigorii la care generaţiile precedente avuseseră acces.

*

În fond, ce ne interesează cel mai mult aici? Miza e felul cum ar putea contribui geometria la educarea gândirii tinerilor. Fără intenția de a divaga, să recurgem aici la o mărturie din domeniul şahului. Ne amintim de o pagină remarcabilă în care Alexksandr Kotov descrie felul cum gândesc unii jucători de şah. Să zicem că într-o poziție anume pe tabla de şah ne tentează două opțiuni: Mutarea A şi Mutarea B. Pentru că suntem într-o competiție oficială, timpul nostru e limitat. Ne gândim la Mutarea A. Încercăm să anticipăm cum gândeşte adversarul. Ceva ne deranjează la Mutarea A, pentru că ar permite un răspuns al oponentului care i-ar putea da un oarecare avantaj. Atunci începem să analizăm Mutarea B. Da, dar şi în acest caz oponentul ar avea ceva inteligent de făcut, ceva care l-ar aduce iarăşi în avantaj. Hai să ne întoarcem din nou la Mutarea A şi să mai analizăm o dată. Ochii ne sunt pe ceas. Minutele trec, în timp ce ezităm între opțiunile A şi B. Avem un timp limitat la dispoziție. Nu, nu vom juca Mutarea A. Atunci hai să revenim la analiza Mutării B. Alternând de câteva ori opțiunea A cu B, de fiecare dată nesatisfăcuți şi de una, şi de cealaltă, sub presiunea timpului, până la urmă alegem: vom face Mutarea C. E

adevărat, nu am apucat s-o analizăm, dar fie ce-o fi, pentru că A şi B oricum nu sunt bune.

Mutarea C poate fi o gafă.

În multe situații, se poate întâmpla ca oamenii să facă raționamente catastrofale. Oamenii pot vedea dovezi acolo unde ele nu există. Să ne amintim filmul *12 oameni furioşi*, cu Henry Fonda, regizat de Sidney Lumet, pe baza unui text de Reginald Rose. Povestea este, în felul ei, extraordinară. După ce argumentele finale au fost prezentate în cazul unei crime, în care un tânăr de 18 ani e acuzat că şi-ar fi ucis tatăl, judecătorul dă ultimele instrucțiuni procedurale juriului. Aşa cum e prevăzut în legea americană, fiecare dintre jurați trebuie să opteze, pe baza probelor prezentate, dacă acuzatul este *vinovat* sau *nevinovat.* Juriul ajunge la o decizie doar dacă votul e dat în unanimitate. Jurații ştiu că verdictul *vinovat* înseamnă automat condamnarea la moarte a acuzatului. Cei doisprezece se mută în sala juriului, unde dezbat argumentele pro şi contra vinovăției acuzatului. Atunci ajung să se cunoască mai bine. Unii dintre ei sunt influențabili, alții sunt creduli, unii irascibili, alții încăpățânați sau orgolioşi. Fiecare element e important atunci când cineva îşi formează o opinie. Despre asta e vorba în film, despre cum inițial unsprezece dintre jurați

sunt gata să voteze *vinovat*, şi numai unul dintre ei, personajul jucat de Henry Fonda, nu crede că există suficiente probe pentru a fi convins de vinovăția tânărului.

Felul cum oamenii gândesc şi cum acceptă probele e esențial, şi asta nu doar în cazurile care ajung în fața legii. Şi ca să pregăteşti un fişier *Excel* cu o programare oarecare, şi ca să ții contabilitatea unei firme, şi ca să programezi o rută comercială sau un traseu turistic e nevoie de un raționament. Ce anume într-un sistem educațional antrenează cel mai bine tinerii pentru diverse feluri de a gândi? Cum anume se poate practica cel mai bine arta de a raționa?

Se pot menționa tot felul de greşeli de raționament pe care oamenii le-au făcut în decursul istoriei. La fel ca în *12 oameni furioşi*, e foarte posibil ca în unele situații 11 oameni din 12 să opteze eronat sau să admită drept valabile dovezi care, la o analiză atentă, sunt de fapt insuficiente. Sunt cunoscute în istorie situații când majoritatea a trimis, prin alegeri libere, un conducător politic nepotrivit către o poziție importantă. Sunt cunoscute situații când opinia politică a majorității a susținut, în momente istorice de cumpănă, un punct de vedere care apoi s-a dovedit a fi eronat. Sunt cunoscute momente când mass-media a izbutit să influențeze, chiar

dacă pentru scurtă vreme, opiniile. Cum de e posibil aşa ceva? Care sunt principiile pe baza cărora raționăm? Ce elemente anume luăm în calcul atunci când reflectăm asupra unei anumite probleme şi o analizăm?

*

Am putea vorbi despre valoarea umanistă a experienței matematice. Nu ne interesează numai să înțelegem spațiul, deşi acest lucru e foarte important, ci să înțelegem totodată şi logica. Vrem să *vizualizăm* anumite lucruri care țin de câmpul logicii. Vrem să *vizualizăm* consecințele unor ipoteze contrare. Vrem să putem reprezenta. Nu ne interesează geometria doar pentru aplicațiile ei imediate, deşi aplicații există; nu pentru că vrem să obținem un profit imediat din plane, sfere sau cercuri, ci pentru că vrem să ilustrăm pe astfel de forme geometrice cum s-ar putea raționa în mod ideal. Ar fi superb dacă în chestiunile vieții de zi cu zi, în medicină, în politică, în economie, lucrurile ar fi la fel de *clare.* Dar nu e aşa. Viața reală include subtilități pe care de multe ori nu le distingem. Atunci când trece prin experiența geometriei la vârsta adolescenței, tânărul ar putea învăța să nu se pripească în direcția concluziilor, să ia în considerare toate

elementele unei situații, să nu admită contradicții în ipotezele pe baza cărora gândeşte, să nu încorporeze într-o argumentație premise false. Şi asta nu e puțin lucru.

Despre curbură (partea a doua)

Adevărul e că nu putem anticipa întotdeauna unde ar putea fi util un concept geometric. În fiecare nouă construcție, încercăm să ne menținem aproape de fundamente, în speranța că lucrurile pe care le studiem sunt aplicabile în contexte tot mai generale. Ne-am dori ca ideile care ne interesează să fie *relevante* pentru ceea ce ne propunem să înțelegem. Cu cât e mai fundamentală o idee matematică, cu atât e posibil ca relevanța ei să fie mai mare.

În geometria diferențială modernă, cea care studiază varietățile de dimensiune oarecare, nu există doar o singură curbură. Există trei curburi clasice, fiecare cu un rol important. Întâi de toate, e *curbura secțională*, extensia naturală a curburii suprafețelor, cea pe care am descris-o în capitolul „Despre curbură (partea întâi)”. Acest concept a fost introdus de Riemann, aşa cum am arătat, extinzând ideea de curbură a suprafețelor introdusă de Gauss în 1827. Apoi este *curbura Ricci*, despre care nu ne propunem să discutăm prea multe aici, dar care are un rol principal

în multe studii, unele dintre ele importante în fizică. În fine, nu în ultimul rând, este aşa-numita *curbură scalară*. Pentru povestea noastră, ea îşi revendică un rol de personaj principal.

Să explicăm pentru început ce înseamnă *curbură scalară*. Să ne imaginăm un obiect de dimensiune 3, situat într-un ambient de dimensiune 4. Ştiu că intuiția noastră nu ne ajută, că nu avem destule dimensiuni pentru a vedea cu adevărat obiectul acesta, dar putem să ne întoarcem la imaginea coborâtă din basm de care ne-am servit mai devreme: covorul zburător din *1001 de nopți*, plutind într-o încăpere oarecare. Covorul obişnuit are dimensiune 2, pentru că are lungime şi lățime. Să ne imaginăm că e vorba despre un covor zburător care ar avea dimensiune 3, aşadar un solid care are nu doar lungime şi lățime, ci şi înălțime. Şi să ne imaginăm că e curbat, supus unor deformări care îl răsucesc, îl torsionează. Vrem să asociem acestei forme geometrice în fiecare punct valoarea unei curburi, la fel cum am făcut în cazul suprafețelor. Unui punct din acest spațiu curbat vrem să-i asociem un număr care să reprezinte curbura scalară în acel punct.

Pentru aceasta, să observăm că în fiecare punct al covorului zburător tridimensional putem duce un spațiu

tangent care, la rândul lui, are dimensiune 3. E greu să ne imaginăm asta? Să privim colțul de sus al încăperii (dacă încăperea e rectangulară şi are un colț drept, lângă tavan). Acest colț are trei direcții perpendiculare una pe cealaltă: una verticală, una spre dreapta şi ultima către stânga. Această configurație se numeşte triedru ortogonal. (Ne amintim asta de la orele de geometrie în spațiu.) Să ne imaginăm acum că acest triedru e mobil, că se poate mişca prin interiorul covorului zburător tridimensional. Acest triedru ne va ajuta să măsurăm curbura scalară în fiecare punct. E ca şi cum am intenționa să-i facem covorului un fel de tomografie, pentru a culege informații numerice din fiecare punct al solidului. Triedrul ortogonal mobil are în fiecare punct trei plane perpendiculare. Atunci când am vorbit despre curbura secțională, am văzut că fiecare plan poartă cu sine propria lui curbură secțională şi că această curbură depinde de cât de deformat este spațiul nostru în direcția respectivului plan.

Vom defini curbura scalară astfel: ea este suma celor trei curburi secționale de pe cele trei fețe ale triedrului ortogonal. E ca şi cum fiecare dintre cele trei fețe ale triedrului ar avea un preț şi noi am calcula prețul total, dat de fața 1 plus fața 2 plus fața 3. Nu e nimic complicat: doar o sumă a unor valori, a unor numere. Pentru a nu ne

încurca între atâtea valori ale curburii, să notăm curbura scalară prin *scal.*

La prima vedere s-ar părea că această cantitate depinde de felul cum aşezăm respectivul reper în punctul unde calculăm această sumă. Chiar aşa, ce s-ar întâmpla dacă am roti triedrul într-o altă poziție? Întrebarea e firească. Dacă am obține pentru fiecare altă poziție relativă a triedrului o altă valoare numerică, cantitatea aceasta nu ne-ar fi utilă, nu-i aşa? De fapt, nu am avea ce face cu o cantitate care ar depinde de poziție. Şi aici vine momentul unei surprize cum numai geometria poate oferi: indiferent cum poziționăm triedrul ortogonal într-un punct dat, atunci când însumăm cele trei curburi secționale de pe cele trei fețe ale sale obținem aceeaşi cantitate. De aceea curbura scalară e importantă: e un *invariant de curbură*; înțelegem prin aceasta faptul că nu depinde de felul cum poziționăm triedrul, ci numai de punctul unde e calculată.

Fireşte, faptul că am descris procesul de construcție a curburii scalare într-un spațiu care are doar dimensiune 3 e util numai pentru a ne da o imagine a construcției. De fapt, putem defini curbura scalară şi pentru un spațiu general, de dimensiune *n.* Să ne imaginăm din nou un covor zburător, în rolul varietății de dimensiune arbitrară, dar de data aceasta ne imaginăm că acest obiect geometric

are dimensiune arbitrară *n*, iar acest *n* este cel puțin 2. Să considerăm un punct oarecare în acest spațiu. Plecând din acel punct, să ne imaginăm *n* direcții, oricare două perpendiculare între ele. Imaginea e aceeaşi ca şi la triedrul ortogonal din colțul camerei noastre, doar că în loc de 3 muchii făcute de intersecția pereților şi de tavan acum sunt *n.* Alegând perechile de plane în acest *n*-edru ortogonal, să considerăm *suma tuturor curburilor secționale de pe aceste plane*[65]. Aceasta e curbura scalară în general, iar notația standard pentru ea este, aşa cum convenisem, *scal.*

Uneori, dacă e mai convenabil să se lucreze cu o formă deghizată a curburii scalare, se utilizează şi aşa-numita *curbură scalară normalizată*, care nu e altceva decât valoarea curburii scalare împărțită la numărul de plane din *n*-edru, adică 2 *scal/n (n-1).* Vom nota cu *R* curbura scalară normalizată.

Ne propuseserăm în primele pagini ale acestui eseu să înțelegem ideea de formă cu ajutorul curburii. O generalizare firească a proprietății sferelor de a avea curbură secțională constantă ar fi acele spații care au curbura secțională constantă în orice punct şi în orice

---

[65] Sunt C_n^2, adică numărul combinărilor de *n* luate câte două plane. Acest număr este *n(n-1)/2.*

direcție. Astfel de obiecte se mai numesc şi *forme spațiale.* Aşadar, o formă spațială e un obiect geometric de dimensiune arbitrară pentru care, în fiecare punct şi în orice direcție am considera un plan, *valoarea curburii secționale considerate este aceeaşi*. Formele spațiale sunt utile pentru că ne permit să comparăm diversele spații geometrice între ele. Oricând vom întâlni un obiect geometric nou, îl putem compara cu acea sferă cu care ni se va părea nouă că seamănă cel mai mult.

*

Suprafețele au fost vreme de veacuri studiate ca fiind situate într-un spațiu ambient cu trei dimensiuni. De aceea Meusnier a introdus forma a doua fundamentală, pentru a da o expresie cantitativă felului cum suprafața stă în raport cu ambientul. Cât de mult se poate generaliza discuția despre raportul dintre un obiect geometric şi spațiul ambient în care el este situat? Unul dintre cele mai importante rezultate ale geometriei diferențiale moderne este teorema de scufundare a lui John Forbes Nash Jr., a cărei demonstrație a fost publicată în 1956 şi care afirmă că *orice varietate*

riemanniană poate fi privită ca subspațiu într-un ambient euclidian de dimensiune suficient de mare.

Una dintre întrebările fireşti ar fi: putem oare să aşezăm orice obiect geometric de acest fel, adică orice varietate riemanniană, în orice spațiu ambient? Putem întotdeauna să punem un măr în buzunar? Răspunsul intuitiv e cel bun: dacă buzunarul e prea mic, atunci nu. Pe de altă parte, atunci când băgăm mărul în buzunar şi nu există restricții, în materialul hainei apare o tensiune. Cumva ar trebui să existe o legătură între felul cum e curbat obiectul nostru, adică mărul, şi tensiunea pe care obiectul respectiv o resimte în fiecare punct față de spațiul ambient.

În 1993, în studiul invarianților de curbură a avut loc o interesantă schimbare de viziune, şi despre aceasta vom povesti în cele ce urmează. Motivația acestui studiu au constituit-o explorarea consecințelor teoremei de scufundare a lui John Forbes Nash Jr. şi necesitatea de a înțelege legătura dintre această teoremă şi ideea de curbură. Relația surprinzătoare a fost enunțată şi demonstrată de Bang-Yen Chen într-o lucrare publicată în 1996. Am notat cu *R* curbura scalară normalizată. Să notăm cu *H* vectorul curbură medie, care este o extensie a ideii de curbură medie introdusă de Sophie Germain şi

poate fi privit ca o expresie a tensiunii dintre subspațiu şi spațiul ambient. Vom nota prin H^2 *lungimea vectorului curbură medie la pătrat.* Să presupunem acum că spațiul ambient este înzestrat cu o curbură secțională constantă *c.* Cu aceste notații, B.-Y. Chen a demonstrat că subspațiul trebuie să satisfacă în fiecare punct condiția ca valoarea lui *R* să fie întotdeauna mai mică sau cel mult egală cu $H^2 + c$.

Ce înseamnă acest lucru? Răspunsul e următorul: tensiunea în raport cu spațiul ambient depinde de curbură. Să ne imaginăm că avem o sferă de dimensiune 2 şi rază 1/5. Atunci curbura ei gaussiană va fi 25. Dacă o aşezăm într-un spațiu euclidian de dimensiune cel puțin 3, care va fi tensiunea pe care sfera o face cu spațiul ambient? Conform inegalității enunțate mai sus, vedem că H^2 nu poate fi mai puțin de 25. Altfel spus, nu se poate să plasăm această sferă în spațiul ambient fără tensiune.

La unul dintre seminarele de la Michigan State University, Bang-Yen Chen a spus odată aşa: Mai în glumă, mai în serios, nu e oare la fel şi cu oamenii? Unii dintre ei vor produce tensiune în orice echipă ar lucra, oriunde i-am pune să lucreze. Alții tind să treacă neobservați. Unii dintre ei parcă au curbură scalară foarte mare, ceea ce produce inevitabil tensiune între ei şi mediul

ambient. Dacă pentru oameni manifestarea tensiunii e o chestiune de timp, pentru spațiile riemanniene se vede numaidecât: asta spune inegalitatea arătată mai sus.

Inegalitatea pe care tocmai am amintit-o are interpretări importante. Suprafețele minimale sunt caracterizate de faptul că H este egal cu zero în fiecare punct al suprafeței. Să presupunem că spațiul ambient este cel euclidian, deci curbura secțională în spațiul ambient este $c = 0$. Atunci, dacă valoarea curburii unui subspațiu dat este strict pozitivă, valoarea lui H^2 nu poate fi zero. Asta e important, pentru că această informație produce imediat o *obstrucție la minimalitate.* Altfel spus, există o informație importantă dată de curbură care spune ceva despre aspectele variaționale: inegalitatea aceasta ne spune când subspațiul considerat nu se comportă ca o membrană elastică aflată într-o poziție în repaus.

Și mai e ceva. O idee care pune în legătură aceste lucruri cu *Theorema Egregium* a lui Gauss. Interpretarea relației R mai mic sau cel mult egal cu $H^2 + c$ este următoarea. Cantitatea geometrică R reprezintă geometria subspațiului riemannian cu care lucrăm. Este aşadar o cantitate *intrinsecă*, în sensul că ea caracterizează geometria respectivului subspațiu. Ne amintim această terminologie din discuția despre *Theorema Egregium* a lui

Gauss. Cantitatea $H^2 + c$ este expresia geometriei spațiului ambient. Practic, această relație cu aparență simplă, R â‰¤ $H^2 + c$, determină, din punctul de vedere al curburii, problema scufundării. Mai mult decât atât, inegalitatea astfel obținută funcționează şi ca o obstrucție, în următorul sens. De exemplu, dacă avem un obiect de curbură scalară normalizată zece, nu îl vom putea niciodată scufunda într-o formă spațială de curbură secțională constantă mai mică strict decât zece, pentru că inegalitatea obținută nu ne permite acest lucru.

*

Atunci când am ajuns la Michigan State, în toamna lui 1996, aveam de gând să studiez în teza mea de doctorat alte probleme. Mi-am schimbat planurile după unul dintre seminarele de joi dimineața. Am realizat că rareori avem şansa să vedem în direct o schimbare de paradigmă, o evoluție a viziunii asupra unor concepte fundamentale. Am renunțat la orice alt plan şi am început să studiez noii invarianți de curbură. A fost o opțiune personală, o alegere care probabil încorpora toate experiențele mele de până atunci. Alegeri similare au fost făcute de doctoranzi din

Belgia, Spania, Japonia sau România, care au considerat aceste noi concepte demne de un studiu în profunzime.

Voi povesti aici o singură idee, dintre cele pe care le-am văzut dezvoltându-se atunci, a cărei evoluție am văzut-o povestită de cel care a pus în evidență conceptul. În 1993, B.-Y. Chen a descoperit o proprietate remarcabilă care are legătură cu problema imersiei. Să presupunem că studiem o varietate riemanniană de dimensiune oarecare *n*, adică exact acel obiect introdus în 1854 de Riemann şi a cărui menire era să generalizeze geometria suprafețelor. Să considerăm toate planele de dimensiune 2 care sunt tangente acestui spațiu într-un punct *P* al său. Să presupunem că putem determina în ce direcție se realizează cea mai mică valoare a curburii secționale, adică infimumul curburii secționale prin *P*; vom nota acest termen prin *inf(sec).*

Este natural să considerăm cantitatea *scal – inf(sec)*; construcția e similară întru câtva ideii din studiul originar al Sophiei Germain, unde problema care interesa era felul cum se distribuie forțele în jurul unui punct material pe o suprafață. Vrem să înțelegem în ce parte se realizează cea mai mică pondere a curburii.

Cu notațiile astfel stabilite, să ne punem din nou problema unei scufundări a unui subspațiu riemannian

într-un spațiu ambient de curbură secțională constantă *c*. Din nou ne punem problema dacă mărul (subspațiul) încape în buzunar (ambientul). Chen a demonstrat că valoarea *scal – inf(sec)* este în fiecare punct mai mică sau egală cu valoarea $bH^2 + dc$, unde *b* şi *d* sunt nişte constante care depind numai de dimensiunea subspațiului riemannian pe care îl studiem, nu şi de punctul considerat.

Cantitatea *scal – inf(sec)* nu ar fi fost deloc un candidat pentru vreo descoperire extraordinară. La prima vedere ni se pare o construcție neaşteptată. Cu toate acestea, *scal – inf(sec)* joacă rolul cantității care exprimă geometria subspațiului (e o cantitate intrinsecă), în timp ce $bH^2 + dc$ este expresia geometriei extrinseci a ambientului. Ideea aceasta se află în cea mai naturală continuitate cu *Theorema Egregium* a lui Gauss. Astăzi, în literatura de specialitate cantitatea geometrică *scal – inf(sec)* se numeşte invariantul de curbură al lui Chen şi se notează prin simbolul $\hat{I}(2)$.

Aminteam că inegalitățile lui Chen dau un criteriu de obstrucție la minimalitate. (Reamintim că un spațiu riemannian minimal verifică *H=0* în fiecare punct.) Să vedem ce înseamnă asta. Ca urmare a inegalității enunțate mai sus, dacă $\hat{I}(2)$ este mai mare strict decât zero, se

întâmplă acelaşi lucru: obiectul geometric despre care e vorba nu poate fi plasat minimal într-un spațiu cu *c = 0.* De aceea aceste inegalități sunt importante: ele poartă codificată întreaga textură a spațiului.

Aşa-numiții invarianți de curbură ai lui Chen se pot generaliza. Prima oară când am văzut această generalizare eram încă doctorand la Michigan State University; era în primăvara lui 1999 şi, audiind un seminar, am fost cuprins de un entuziasm care s-a convertit într-o intensă curiozitate. N-am să uit niciodată sentimentul acela. Era ca şi cum un mare secret al naturii s-ar fi decriptat în fața mea: nu mă mai interesa decât studiul ideii de curbură, într-un context contemporan.

Semnificația culturală a acestei idei ar putea fi descrisă şi astfel: de fapt, ce înseamnă curbură? Pentru suprafețe, conceptul a fost clarificat de Gauss. În dimensiuni mai mari, am văzut că lucrurile se complică, dar definiția fundamentală a curburii secționale ne-a rămas de la Riemann. Faptul că putem controla scufundarea unui spațiu într-un alt spațiu, pe care l-am numit ambient, uitându-ne la invarianții de curbură, înțelegem că de fapt aceşti invarianți poartă cu ei un adevărat ADN al formei[66].

---

[66] Această metaforă apare prima oară la Chen, într-un studiu pe care l-a scris în 1997. Descrierea mi se pare foarte sugestivă: cantitatea care

Curbura este astfel măsura prin care o formă geometrică se abate de la forma unei sfere; cât îi lipseşte unui spaţiu, în fiecare punct, ca să fie o sferă perfectă. Şi sunt mai mulţi invarianţi de curbură care se pot construi după ideea prin care a fost obţinut *Î(2)*. Paradoxal e că între aceşti invarianţi nu există relaţii care să îi lege pe unii de ceilalţi. Altfel spus, toate acele cantităţi sunt independente, după cum şi elementele constitutive care intră în structura ADN-ului unei fiinţe vii au caracter independent.

Aşadar, problema curburii poate fi de mare complexitate şi studiul ei continuă şi în zilele noastre. Atunci când spunem *curbură*, suntem pregătiţi să avem în vedere toată această multitudine de informaţii care descriu spaţiul şi ne aşteptăm să existe probleme (aşa cum e problema scufundării) pentru abordarea cărora să fie nevoie să regândim problema de la fundamentele ei. Avem mult mai multe instrumente decât pe vremea când o minte strălucită, ca Leonhard Euler, considera chestiunea curburii *mai degrabă echivocă.* Dar natura problemei pe care o studiem ne poate constrânge să regândim fundamentele fiecărui concept cu care lucrăm.

---

exprimă curbura este ADN-ul formei, la fel cum ADN-ul obişnuit codifică toată informaţia biologică a unei celule.

La un deceniu după ce mi-am încheiat teza, am continuat să reflectez asupra acestor concepte. Atunci când am avut ocazia să lucrez cu tineri talentați şi interesați, i-am învățat câte ceva din ceea ce am studiat eu. Experiența cea mai interesantă alături de studenții mei a fost descoperirea, în vara anului 2012, a unui invariant de curbură pe care l-am numit *curbură amalgamatică* şi ale cărui proprietăți le-am studiat[67]. Construcția lui nu seamănă cu cea a invarianților Chen, dar paradigma studiului nuanțat al altor cantități de curbură decât cele clasice e evident îndatorată deschiderii de după descoperirile din perioada 1993-1996.

Cum să trăieşti matematica: mic îndreptar

Manualul de analiză matematică pe care-l citeam când aveam douăzeci de ani începea astfel: „Faptele prezentate în acest volum...". În carte, autorul construia totul plecând de la zero, ca şi cum ar fi construit propriul punct de

[67] Am scris lucrarea „New Curvature Inequalities for Hypersurfaces in the Euclidean Ambient Space" alături de patru dintre studenții mei, C.T.R. Conley, R. Etnyre, B. Gardener, L.H. Odom. Va apărea în 2013, în *Taiwanese Journal of Mathematics*.

vedere asupra realității. În prefață, el povestea că pentru a scrie cartea nu s-a folosit de bibliografie, ci a încercat să reconstruiască totul, verificând fiecare potențială breşă, de la fundațiile teoriei către cele mai avansate aplicații. Construcția era completă, autorul nu evita nici o dificultate, iar cartea era, în felul ei, *trăită*.

În fond, ce înseamnă să trăieşti matematica? Dacă matematica se ocupă de fapt cu studiul ideilor despre spațiu, timp, funcții şi alte obiecte matematice, dacă include între altele şi studiul raționamentelor, atunci ce ar putea însemna să trăieşti un domeniu care are ca obiect de studiu idei abstracte? Şi prin ce sunt matematicienii diferiți de alți profesionişti, de ingineri, de pildă?

Fireşte, e loc de diferențe de opinie. Fiecare matematician a fost sedus de o anumită temă matematică, de o problemă, de o idee. Cel mai mult vorbesc despre noi şi cel mai bine ne descriu ideile care ne atrag. Pentru o mai mare acurateţe a răspunsului, poate ar fi mai bine să ne întoarcem la paginile scrise de unii dintre cei mai îndreptățiți să povestească lucrul acesta.

Godfrey Harold Hardy (1877-1947) a fost un matematician britanic de elită, recunoscut pentru contribuțiile sale în analiza matematică şi în teoria numerelor. A devenit celebru pentru colaborările sale cu

J.E. Littlewood şi S. Ramanujan şi are meritul extraordinar de a fi recunoscut înzestrarea nativă a lui Ramanujan şi de a-l fi ajutat să vină în Anglia pentru a-i înlesni o educație matematică serioasă. Între altele, Hardy a scris şi un eseu intitulat *A Mathematician's Apology.* Acest volum al lui Hardy mi se pare comparabil cu *Scrisorile către un tânăr romancier* ale lui Mario Vargas Llosa, pentru că în el sunt disecate secretele meseriei. *A Mathematician's Apology* a fost scrisă de G.H. Hardy în 1940, într-o perioadă în care, aşa cum scrie despre el un fost student, C.P. Snow, care l-a cunoscut bine, puterea lui creatoare, ca matematician, se afla într-un ireversibil declin. La un moment dat, în cartea amintită, Hardy îşi propune să aducă în discuție „utilitatea" matematicii. E vorba despre aplicabilitatea directă a matematicii, utilitatea ei în nuanța cea mai pragmatică a cuvântului, în sensul îmbunătățirii vieții, confortului şi al sporirii fericirii. Ca să discute aceste lucruri, el analizează punctele de vedere asupra matematicii pe care le expun alți autori în diverse eseuri din epocă.

Hardy scrie astfel: „Se poate obiecta că am definit «utilitatea» într-un mod prea restrâns, că am definit-o numai în termeni de «fericire» şi de «confort», şi că am ignorat efectele generale «sociale» ale matematicii, asupra

cărora scriitori recenți, cu simpatii foarte diferite, au pus un atât de pronunțat accent. Astfel, Whitehead (care a fost matematician) vorbeşte despre «extraordinarul efect al cunoaşterii matematice asupra vieților oamenilor, asupra întreprinderilor lor zilnice, asupra organizării societății»; iar Hogben (care e la fel de puțin înclinat către simpatie față de ceea ce eu şi alți matematicieni numim matematică pe cât Whitehead e înclinat către simpatie) spune că «fără o cunoaştere a matematicii, gramatica mărimii şi a ordinii, nu putem planifica societatea rațională în care va fi îndestulare pentru toți şi sărăcie pentru nimeni» (şi alte considerații cu o finalitate similară)".

După aceste aprecieri, Hardy scrie că în opinia lui limbajul amândurora e prea exagerat şi că ambii autori ignoră distincții evidente. Asta poate fi înțeles în cazul lui Hogben, pentru că el nu este matematician. Ceea ce înțelege el prin „matematică" e doar acea parte a disciplinei pe care Hardy o numeşte „şcolară", care are un caracter foarte elementar şi mai degrabă introductiv. Pentru Hardy există şi un alt nivel al matematicii, pe care îl numeşte „matematică reală" şi care este acea parte a disciplinei ce l-ar interesa pe cercetător, pe creatorul de informație, pe cel care are nevoie să modeleze matematic un fenomen nou într-un câmp de studiu. Deşi e gata să

admită că matematica „şcolară” are multe utilităţi sociale, Hardy crede că Hogben cu greu ar avea cea mai mică înţelegere a matematicii „reale”. Cu o nuanţă polemică, Hardy scrie despre Hogben: „Pentru el, matematica «reală» este un obiect demn de condescendentă milă”.

Cât despre Whitehead, Hardy are a-i face un alt reproş. Despre el scrie că „uită, în entuziasmul lui, distincţii cu care e cât se poate de familiar. Matematica aceea care are un «efect extraordinar» asupra «întreprinderilor zilnice ale oamenilor» şi asupra «organizării societăţii» nu e matematica lui Whitehead, ci aceea a lui Hogben”.

Nuanţa aceasta mi se pare importantă, pentru că în acest pasaj Hardy pune în evidenţă rolul formativ al matematicii, mai precis faptul că studiul detaliat al unei teme matematice induce un efect formativ şi constituie o experienţă revelatoare. Dar iată cum introduce Hardy necesarele distincţii: „Matematica aceea care poate fi folosită «pentru scopuri obişnuite de oameni obişnuiţi» e neglijabilă, iar cea care poate fi folosită de economişti sau sociologi cu greu se ridică la «standarde academice». Matematica lui Whitehead poate avea un efect profund asupra astronomiei sau fizicii, un efect foarte apreciabil asupra filozofiei – întrucât gândirea înaltă într-un domeniu are întotdeauna şanse să influenţeze gândirea înaltă dintr-

altul –, dar are extrem de puțin efect asupra oricărui alt lucru. «Efectele ei extraordinare» pot fi văzute nu asupra oamenilor în general, ci asupra oamenilor ca Whitehead însuşi".

Pe lângă sublinierea vocației formative a matematicii, pasajul acesta conține şi expresia viziunii politice a lui Hardy, dorința lui ca rezultatele cercetărilor matematice să nu servească maşinii de război. Totodată, transpare în acest pasaj şi sarcasmul lui bine temperat, niciodată covârşit de aroganță. În ultimă instanță, *A Mathematician's Apology* este un text cu nuanțe sumbre. Pentru că e istoria unui matematician care se stinge, care nu mai lucrează, care nu se mai bucură să facă cercetare.

Dar întrebarea cea mai importantă ne pare a fi următoarea: ce afli atunci când practici matematica, atunci când încerci să înțelegi un domeniu în profunzime, atunci când mergi până la capăt cu observarea unui fenomen abia descoperit? Ce se întâmplă cu gândirea celui care urmează calea cercetării? Cum ajunge el să recunoască, să discearnă şi să aleagă lucrurile esențiale, după ce s-a antrenat să facă matematică şi s-a străduit să meargă cât de departe se poate în domeniul său? Ne imaginăm că e vorba despre o transformare profundă, una pe care nu o simți imediat; ceea ce gândeşti, ceea ce scrii,

ceea ce vezi şi înțelegi ajunge să te schimbe. Simpla practicare a matematicii face diferența. Istoria domeniului tău ajunge să te locuiască. Şi oare e puțin lucru? Sau, aşa cum scrie Hardy despre consecințele matematicii: „«Efectele ei extraordinare» pot fi văzute nu asupra oamenilor în general, ci asupra oamenilor ca Whitehead însuşi".

În secțiunea 28 a cărții sale amintite, Hardy se întreabă dacă matematica face rău cuiva. În acest context, ajunge să se întrebe dacă matematica are vreun efect asupra artei războiului. După o scurtă şi oarecum stânjenită analiză (scria acele pasaje în vremuri deloc lipsite de tragism, pe vremea războiului), el trage concluzia că doar anumite ştiințe aplicate au un efect direct asupra artei războiului, dar matematica, nu.

În acest context scrie următorul pasaj extraordinar, în care e expusă în detaliu tensiunea raportului dintre cercetător şi domeniul său: „Când lumea înnebuneşte, matematicianul găseşte în matematică un balsam incomparabil. Pentru că matematica este, dintre toate artele şi ştiințele, cea mai austeră şi mai îndepărtată, şi un matematician ar trebui să fie, dintre toți oamenii, acela care să-şi găsească refugiu acolo unde, aşa cum spune Bertrand Russell, se află «unul dintre cele mai nobile

impulsuri ce ne pot scăpa din tristul exil al lumii reale». Din păcate, trebuie menționată o rezervă – matematicianul nostru ar trebui să nu fie prea în vârstă. Matematica nu e un subiect contemplativ, ci unul creativ; nimeni nu poate să afle prea multă consolare în ea atunci când şi-a pierdut puterea sau dorința de a crea; şi asta se întâmplă mai devreme sau mai târziu oricărui matematician".

*

Alain Connes, un matematician francez căruia i-a fost decernată medalia Fields pentru contribuțiile lui din domeniul algebrelor de operatori, a descris astfel trăirea care însoțeşte o descoperire matematică: „Procesul verificării poate fi foarte dureros: îți e foarte *frică* de ideea că ai fi putut greşi. Dintre cele patru faze, aceasta implică cea mai multă anxietate, pentru că niciodată nu ştii dacă intuiția ta e corectă – la fel ca în vis, când de cele mai multe ori intuiția ți se dovedeşte greşită. Îmi aduc aminte că odată mi-a luat o lună ca să verific un rezultat: am trecut prin demonstrație până la cel mai mic detaliu, până la obsesie – când aş fi putut pur şi simplu să verific logica argumentului cu calculatorul. Dar în momentul când iluminarea apare, îți angajează emoțiile în aşa fel încât îți e

imposibil să rămâi pasiv sau indiferent. În acele rare ocazii când am trăit-o, recunosc că nu mi-am putut reține lacrimile”.

Aceasta e o mărturie pe care o cred.

*

Să încheiem această discuție cu următoarea explorare: când o informație este de natură matematică realmente utilă? Când e o teoremă importantă? Întrebările acestea au sens, pentru că dacă ne-am propune să ştim *totul*, să înmagazinăm *totul*, atunci n-ar mai fi nici un fel de ştiință. Dacă informațiile ar fi aşezate pe rafturile bibliotecii în mod haotic, fără o structură clară, şi dacă totul ar fi egal ca importanță, atunci la ce ne-ar servi atâtea secole de istorie şi de strădanii? Chiar aşa, cu ce rămânem din toată aventura cercetării matematice?

Un posibil răspuns apare în *Ştiință şi metodă*, volumul lui Henri Poincaré din 1908. El scrie că „cele mai interesante fapte sunt acelea care pot fi folosite de mai multe ori, cele care au şansa de a reapărea”.

Şi mai departe: „Suntem norocoşi să trăim într-o lume în care există astfel de fapte. Să presupunem că în loc de optzeci de elemente chimice am avea optzeci de milioane,

şi că nu ar fi unele comune şi celelalte rare, ci distribuite uniform. Atunci, de fiecare dată când am lua în mână o pietricică nouă am avea o mare probabilitate să fie compusă din nişte substanţe necunoscute. [...] Într-o astfel de lume n-ar exista ştiinţă, şi poate nici viaţa nu ar fi posibilă, pentru că evoluţia nu ar fi dezvoltat instinctele de auto-prezervare".

Aşadar, trăim într-o lume în care ştiinţa e posibilă, tocmai pentru că lumea reală vine cu o anumită structură. Şi atunci, ce structură ar trebui să capete ceea ce ştim noi, aşa încât informaţiile pe care le deţinem să fie aşezate într-un mod cât mai accesibil, util şi pragmatic? Răspunsul ni-l sugerează Poincaré: faptele care au şansele cele mai mari să se repete. Adică principiile, faptele cu un caracter de generalitate în cadrul logic al unui domeniu, conceptele fundamentale. Ele trebuie să ne sugereze structura unor teorii, viziunea, acoperirea temelor. În spatele lucrurilor care se repetă se află structura, principiul care generează, invariantul. Şi un enunţ mai general: ştiinţa e posibilă acolo unde pot fi descoperite legi a căror aplicare să se poată repeta, în structuri iterabile, recognoscibile, care să conducă eventual către clasificări.

Iar atitudinea noastră etică faţă de cercetare înseamnă, de fapt, sincera noastră opţiune şi străduinţă de a

identifica aceste legi, de a reflecta asupra lor, indiferent cât de dificile ar fi detaliile tehnice. Absența opțiunii etice ar însemna eludarea dificultății teoretice, a dificultății fundamentale pentru relevanța problemei, şi reprezentarea unui aspect marginal drept principiu esențial. O astfel de confuzie nu ar fi onestă din punct de vedere intelectual. Ar fi ca un portret realizat cu un aparat fotografic al cărui obiectiv s-ar concentra nu asupra chipului, ci asupra unui detaliu nesemnificativ situat în decor.

Diamantul din moştenirea de familie

Probabil că cel mai important lucru de care au beneficiat cei care s-au format în anii şaptezeci sau optzeci în România secolului trecut a fost contextul şcolar, şi includem aici întregul ansamblu, cu plusurile şi scăderile lui, cu stilurile de predare de la clasă, cu manualele şcolare şi conținutul lor, cu raportul dintre profesori şi elevi, fără a uita să amintim autoritatea celui de la catedră, într-o strictă legătură cu felul cum era definită autoritatea în societate în perioada istorică respectivă. Era un întreg complex de factori pe care i-am putea menționa. Un loc aparte l-au jucat personalitățile de prim rang care au influențat dezvoltarea şi practicarea domeniilor respective, şi România de atunci nu a fost lipsită de astfel

de personalități. Datorită matematicienilor români activi în acele domenii şi felului cum au prezentat ei politicienilor din epocă importanța matematicii, s-au putut realiza câteva lucruri de o extraordinară calitate. Despre ideea aceasta voi vorbi aici atunci când îl amintesc pe Nicolae Teodorescu.

L-am cunoscut pentru prima oară aşa cum l-au cunoscut şi alți tineri matematicieni din generația mea: datorită unei diplome. Pe o scenă, după o olimpiadă națională, am primit o diplomă de culoare albastră, cu efigia Societății de Ştiințe Matematice, şi o strângere de mână. Aveam 13 ani. Mai mult nu-mi trebuia: eram câştigat pentru totdeauna, pentru că lumea de atunci atribuise valoare matematicii. Aveam un abonament la *Gazeta matematică*, lucram din *Culegerea de probleme* a lui Țițeica şi vedeam cât de eficientă este, chiar şi după 90 de ani de funcționare neîntreruptă (atâția erau pe atunci), tradiția de a face matematică în jurul unui periodic lunar. Acum ştiu că acest fenomen de o asemenea perenitate şi de o asemenea calitate e unic în lume. Existau în Uniunea Sovietică *Matematika v şkole* şi *Kvant*, dar nici nu erau atât de vechi, nici nu şi-au putut continua activitatea în deceniile din urmă. Publicațiile similare nord-americane, de sorginte mult mai recentă, nu oferă o selecție de

probleme pentru elevii din şcoala medie şi de liceu, dar fac o treabă excelentă cu studenții, la nivel de facultate. De fapt, în America de Nord nu există un periodic cu probleme de gimnaziu. Din punctul de vedere al interacțiunii cu matematica elementară, lumea *Gazetei matematice*, administrată de Societate, era un cadru aparte. Nicolae Teodorescu a deținut, din 1975 şi până în 1995, funcția de preşedinte al Societății şi e responsabil pentru atragerea către matematică a multora dintre noi.

Am participat de patru ori la taberele de vară ale *Gazetei matematice,* ca elev de liceu. La alte activități ale Societății, după ce am terminat liceul, am fost invitat ca membru al comisiei. Exista o similaritate între felul cum discutam noi despre problemele din *Gazeta matematică* în anii optzeci şi felul cum discutau între ei, despre problemele din epocă, matematicienii din anii douăzeci sau treizeci. De unde ştim asta? Din fragmentele de corespondență care ni s-au păstrat, din câteva pagini de memorii... E curios: vreme de un secol, în societatea românească, altminteri atât de schimbătoare, a existat ceva neschimbat.

Atunci când am ajuns la tabăra *Gazetei* din august 1985 eram interesat de probleme de geometria triunghiului, în stilul celor din monografia lui Traian

Lalescu. Am descris într-un alt capitol ce s-a ales azi de geometria triunghiului şi cum informaţia utilă din vechea teorie s-a disipat în alte domenii. Pe atunci însă nu ştiam asta şi, dacă cineva ar fi aruncat o umbră de îndoială asupra opţiunii mele pentru geometria triunghiului, l-aş fi provocat la duel.

La tabăra de vară a *Gazetei* am văzut vreme de mai bine de o săptămână lecţii foarte interesante prezentate de profesorii care lucrau ca redactori ai *Gazetei*, Marcel Ţena şi Alexandru Constantinescu, care sunt amândoi excelenţi în domeniile matematicilor fundamentale. Îmi aduc aminte de o prezentare a lui Nicolae Teodorescu pe baza unor probleme selectate din reviste internaţionale; atunci am auzit prima dată de revista australiană *Parabola* şi de revista britanică *The Mathematical Gazette*. Mai cu seamă, ţin minte prezentarea pe care Daniel Tătaru a făcut-o problemelor de la olimpiada internaţională de matematică din anul acela. Daniel Tătaru tocmai revenise de la OIM, unde obţinuse unul dintre cele două scoruri perfecte de 42 de puncte din competiţie. Ascultându-l cum ne descria soluţiile, într-o sală de clasă de liceu[68] în care eram strânşi cu toţii, vorbind cu claritate matematică menită să depăşească dificultăţile cu naturaleţe, am avut pentru o

[68] Era liceul din Curtea de Argeş, cel situat în proximitatea mănăstirii.

clipă sentimentul că mai bine de atât mintea omenească nu poate funcționa. Am înțeles încă de atunci că văd la lucru una dintre acele inteligențe strălucite care pot atinge uluitoare performanțe tocmai pentru că aduc claritate acolo unde noi, ceilalți, oamenii obișnuiți, facem uriașe eforturi pentru a opera cu niște modeste distincții. Partea interesantă cu aceste probleme de olimpiadă e că au conținut elementar, deci enunțul lor e accesibil oricui; partea înspăimântătoare e că le rezolvă atât de puțini.

Pentru generația mea, meritul lui Nicolae Teodorescu a fost că a creat un mediu în care aceste interacțiuni au fost posibile. Asta vedeam atunci, cu ochii unui elev de liceu. Pentru matematici, meritul lui Nicolae Teodorescu rămâne că a studiat derivata areolară în anii treizeci, sau că mai târziu a contribuit la dezvoltarea mult citatului subiect care e cunoscut astăzi în cercetare sub numele de sistemele Moisil-Teodorescu. Posteritatea face dreptate cercetătorului prin numărul de citări.

Nicolae Teodorescu mi-a povestit la un moment dat despre perioada lui de liceu, pe care a găsit-o stimulantă și plină de inspirație. Făcuse liceul în București, la „Spiru Haret”. Era cu un an mai mic decât Mircea Eliade și în același an de studii cu Constantin Noica; pe amândoi i-a cunoscut foarte bine. Mi-a spus că recunoaște majoritatea

evenimentelor evocate în *Romanul adolescentului miop*, pe care-l descria drept o transpunere foarte apropiată de realitate a unor evenimente care avuseseră loc la „Spiru Haret”. Mi-a istorisit cum, în perioada studenției lor, la finele anilor douăzeci, a venit Constantin Noica să audieze cursuri la Facultatea de Matematică şi cum l-a întrebat multe lucruri despre diverse fenomene matematice; la fel ca în cazul multor altor umanişti dotați cu o inteligență pătrunzătoare, întrebările lui puteau fi foarte diferite, de la chestiuni elementare, de natură mai degrabă tehnică, până la aspecte conceptuale, care țineau de completitudinea unei teorii. Nicolae Teodorescu îl cunoscuse foarte bine şi pe Dan Barbilian, cu a cărui familie avea şi legături de rudenie; se întâmplase în multe situații, uneori cu un anunț foarte scurt, ca profesorul Barbilian să-l roage pe profesorul Teodorescu să-l înlocuiască la curs. Şi tot de la Nicolae Teodorescu am aflat cât de dificilă a fost, sub toate aspectele, organizarea Congresului de Matematică din 1956 de la Bucureşti, atunci când Jacques Hadamard a venit în România şi când Wilhelm Blaschke s-a întâlnit ultima dată cu Dan Barbilian. Mi-a povestit cum l-a cunoscut, la una dintre casele de creație pe care oamenii de ştiință le împărțeau cu scriitorii, pe Camil Petrescu. Autorul *Patului lui Procust*

era convins că ar trebui socotit printre cei mai mari matematicieni români în viață, pentru că viziunea lui filozofică îi permitea o perspectivă de ansamblu asupra matematicilor. Şi vorbea foarte serios. Din ceea ce-mi povestea Nicolae Teodorescu, mi se părea că văd un Camil Petrescu în întregime complementar celui descris de Eugen Ionescu în *Nu*, gata să tremure dacă cineva exprimă o critică față de textul său.

Lumea matematicii are o memorie aparte. Probabil că dacă n-aş fi întâlnit olimpiadele şcolare şi dacă în cultura română n-ar fi existat *Gazeta matematică*, n-aş fi devenit matematician. Pentru mine, atracția literaturii a fost întotdeauna extrem de puternică, chiar şi în momentele când lucram intens matematică. Ceea ce a schimbat esențial formația mea a fost faptul că am fost atras de mediul pe care l-am socotit drept cel mai inteligent în epocă[69].

Am publicat primele două probleme propuse în *Gazeta matematică* pe când eram în clasa a XI-a şi urmam Liceul „I.L. Caragiale" din Bucureşti. Includerea celor două

[69] Această apreciere ar merita diminuată după ce între timp am văzut cum se ceartă între ei matematicienii bucureşteni. Nu voi zugrăvi aici fresca aceasta, ci voi menționa doar că tabloul ei ar putea concura – ca număr de personaje şi intensitate – cu oricare dintre pereții exteriori ai Voronețului.

probleme în revistă avea să fie decizia editorială a lui Liviu Pîrşan. Şi pe el l-am cunoscut tot grație taberelor *Gazetei*, dar în clasa a XII-a mi-a fost şi profesor la clasă, la „Caragiale”; n-am să uit străduința cu care a încercat să-i facă pe medicinişti să învețe teoria grupurilor înainte de examenul lor la Facultatea de Medicină. Nu părea să înțeleagă că nu toți oamenii sunt interesați de matematici.

Nicolae Teodorescu îl prețuia mult pe Liviu Pîrşan. Aveam să văd de ce abia într-o seară din vara lui 1991, când comisia care trebuia să pregătească subiectele pentru Concursul *Gazetei* se reunise într-o cameră de hotel din Câmpulung Muscel, pentru o şedință de lucru. Alături de Nicolae Teodorescu, erau de față Marcel Țena, Alexandru Constantinescu, Liviu Pîrşan, Iulian Beju, Dumitru Acu şi cu mine. Se discutau seturi de probleme pentru trei grupe de vârstă: elevii din clasele VII-VIII, IX-X şi XI-XII. Concursul *Gazetei* avea un format foarte interesant: era o problemă de tehnică matematică şi o alta de raționament matematic, iar Nicolae Teodorescu acorda atenție distincției dintre cele două feluri de a face matematică. La un moment dat, în discuția comisiei s-a conchis că ar mai fi nevoie de o problemă. Nicolae Teodorescu a spus că ar fi de preferat să fie o problemă de algebră, potrivită pentru clasele XI-XII, pentru proba de

raționament. S-a întors către Liviu Pîrşan şi l-a întrebat: „Liviu, ai putea să ne sugerezi o problemă?”. Răspunsul a venit imediat: „Sigur că da, domnule academician”. Şi a scos dintr-un caiet o foaie pe care se afla o problemă care corespundea întocmai caracteristicilor cerute de nevoile concursului. A întins foaia către Nicolae Teodorescu. Mi se întâmpla să nu-mi dau seama întotdeauna când Liviu Pîrşan zâmbea sau când era serios, dar de data aceea sigur zâmbea. „Dacă aveai problema, de ce nu ziceai nimic?”, a întrebat Nicolae Teodorescu. „Dacă nimeni nu m-a întrebat nimic”, a adăugat Liviu Pîrşan.

Meritul lui Nicolae Teodorescu era că ştia să dea credit fiecărui colaborator pentru calitățile lui de excepție, şi asta permitea programului construit de el în anii optzeci să fie atât de stimulant şi să transmită atâta inspirație.

Şi nu era puțin lucru, într-o realitate care nu părea concepută pentru a recunoaşte excelența performanțelor culturale. Dar, de fapt, când în istorie a existat o asemenea realitate? Când în istorie a existat o lume ideală, dedicată doar adâncirii conceptelor fundamentale? Nu ar fi oare un semn de naivitate fie şi să invocăm o asemenea imagine?

Codul secret – note pentru o mărturisire literară[70]

Una dintre întrebările care-mi sunt adresate din ce în ce mai des e când încep să scriu în engleză. O astfel de întrebare pleacă de la premisa că pentru fiecare scriitor român, odată trecut de frontiera de vest a țării de origine, nu mai e decât o chestiune de timp până când să-şi propună deplina lepădare de presupusa neîmplinită identitate românească. Bunul-simț comun pare să ne întrebe: nu ne dorim asta cu toții? Privită astfel, identitatea românească apare ca neîntreagă, dacă nu cumva ca un neajuns. Dacă tot plecăm din România, dacă educația noastră formală trece prin cadrul formativ al altei culturi, dacă această cultură exercită o puternică influență

[70] O primă versiune a acestui text a fost prezentată pe 22 noiembrie 2006 la Centrul Cultural din Piteşti şi publicată în revista *Argeş*, din decembrie 2006, la invitația lui Jean Dumitraşcu. O a doua versiune a fost inclusă în volumul *Distanțe, demoni, aventuri*, Editura Tritonic, 2008. Eseul pe care îl prezentăm aici pentru prima oară reprezintă versiunea română integrală a textului „The Secret Code, Notes for a Literary Confession", inclus în antologia *Romanian Writers on Writing*, editată de Norman Manea şi coeditată de Sanda Cordoş pentru seria „The Writer's World", coordonată de Edward Hirsch la Trinity University Press, antologie publicată în 2011. Datorez mulțumiri dlui Norman Manea pentru invitația de a propune acest text pentru amintita antologie; l-am revăzut şi rescris cu acel prilej.

asupra noastră, nu ar fi oare de aşteptat să o adoptăm integral? În plus, ştim foarte bine că nu am lăsat în urmă o lume perfectă, ştim că nu avem nostalgii, nici regrete. Câțiva dintre contemporanii noştri ne-au deranjat îndeajuns, alții ne-au enervat cu insistență. Am descoperit că România nu e o şcoală a caracterelor. Nu a venit momentul să scăpăm de contemporanii noştri şi în spirit, după ce am reuşit să-i evităm din punct de vedere geografic?

Pentru mine lucrurile au stat altfel. Am plecat din România în 1996. Am locuit de atunci în Michigan, Arizona şi California şi am scris mai multe cărți de literatură în limba română. Nu plănuiesc să-mi schimb limba literară. Vreme de mai bine de un deceniu am colaborat la mai multe periodice culturale din România. Am avut ocazia să port numeroase dialoguri. Am participat de mai multe ori la conferințe sau manifestări literare ca scriitor român. Am primit invitații să scriu texte pentru publicații care apar în alte locuri din lume – în calitate de scriitor român. Foarte multe lucruri mi se întâmplă de parcă nu aş trăi lângă Los Angeles, ci în oricare dintre locurile unde cândva mă simțeam acasă, în Bucureşti, de exemplu. Mai mult, am optat să scriu literatură de ficțiune despre realitatea românească. Am scris despre România

de dinainte de 1989 şi am scris şi despre România de după. Am scris şi despre România viitorului, atât cât am văzut eu despre ea...

Ar trebui să încep cu începutul. Am scris prima nuvelă la şaptesprezece ani. Era neizbutită şi sunt mândru că mi-am dat seama de asta destul de repede. Nu am făcut nici un rău: nimeni nu a văzut nimic. Mai târziu, m-am specializat în proză, după o lungă perioadă în care am încercat diverse formule poetice, fără să mă conving că am surprins esențialul în vreuna dintre ele. Am avut momente când am fost fericit că am exprimat o anumită imagine sau o anumită idee, dar, cu toate acestea, mi s-a părut că întreaga construcție e prea puțin. Formula literară optimă îmi pare a fi cea care îți permite să spui esențialul, să lepezi balastul, să accezi la un adevăr ascuns dincolo de cosmetica realității, de minciunile pe care suntem înclinați să le credem sau să le urmăm. Am învățat asta în matematică: matematica spre asta aspiră, spre acest ideal debarasat de afirmații repetitive sau de locuri comune ne instruieşte să ne îndreptăm.

În perioada când am scris poezie, înainte de vârsta de 24 de ani, am descoperit câteva lucruri. În poem, chiar şi când scrii pe ton de glumă, nu îți vine să minți, nu vrei să aproximezi, nu vrei să-ți bați joc, nu vrei să-ți cauți scuze

sau să accepți jumătăți de măsură. Concizia e parte a jocului. Pe de altă parte, am descoperit că proza scurtă e o specialitate la fel de onestă. Cred că momentele mele cele mai bune pentru proză scurtă au fost 1994 şi 1997, când am scris câte cinci sau şase texte. Am aşteptat aproape un deceniu până când acele texte să fie reunite în volum. Am scris în apartamentul din Bucureşti, într-o casă de la țară, cât încă mai eram în România, în biblioteca de la Michigan State University, când eram student şi nu aveam încă un computer, în biroul meu de la Departamentul de Matematică, iar una dintre proze a fost scrisă pe un aeroport, când am avut de aşteptat prea mult între două zboruri şi febrilitatea de a scrie atinsese maximul. Dar nu interesează statistica, nici locurile. Toate aceste informații nu trec în text, sunt balast, sunt decor. Aşa cum spuneam, altul e criteriul: a izbutit oare vreunul dintre aceste texte să spună ceva important, să decodifice un mesaj ascuns în ambianța nesigură a realității? Apartenența la o cultură nu se manifestă prin locul unde e scris textul, ci prin modul în care încerci să esențializezi actul literar. Urmăreşti o idee într-un stil care are sens în contextul unei anumite viziuni culturale. Această viziune e influențată de obicei foarte mult de cultura de origine. În cultura română, lucrurile importante, cele de unde ne

selectăm temele literare, par mereu altele decât în alte culturi. Ne selectăm temele într-un mod diferit, pe care-l descoperim abia atunci când vedem că unele dintre lucrurile importante pentru noi nu sunt importante pentru alții. Această percepție oarecum diferită a ceea ce merită povestit şi nuanțat face greu de tradus unele texte care au făcut de mult carieră în România.

Pentru mine, o altă regulă a jocului în ceea ce priveşte proza scurtă e ca nici măcar două dintre istorii să nu fie la fel. Să scrii un roman de patru sute de pagini pe o soluție literară clasică, mergând pe ceva dinainte gândit, la nevoie gândit de alții, de exemplu pe soluția literară inventată de Camil Petrescu sau pe cea inventată de Jules Verne, mi se pare facil. Cred că marele efort e să imaginezi la fiecare nouă istorie o soluție literară firească, naturală, dar distinctă, de o particularitate care să solicite cititorul, să-i dezvăluie un nou mod de comunicare, o nouă descoperire, o şarjă. Se ştie de mult că fiecare text îşi conține propria sa poetică. Nu cred că ar interesa un experiment de utilizare limitată, ci o soluție întreagă, matură, împlinită, publicată după cuvenită chibzuință şi aşteptare. Ideal ar fi ca în fiecare text scriitorul să fie convingător, tema să intereseze, efortul construcției originale să aibă sens. Problema se poate pune aşa: ai la dispoziție zece pagini şi

o poveste. În spatele acestei poveşti se află ceva esențial, un adevăr pentru care ai fi în stare să te baţi în duel. Nu contează dacă ai scris trei mii de pagini sau zece până atunci. Contează dacă sinteza pe care o propui e profundă.

E adevărat că unii autori reuşesc asta într-un roman. Alții reuşesc în poem. În spațiul literar românesc îl prețuim atât de mult pe Mateiu Caragiale pentru soluția literară atât de originală, bine şlefuită şi rafinată din *Craii de Curtea-Veche* (o carte publicată în primă ediție în 1929), o soluție cu atât mai admirabilă cu cât, putem s-o spunem, esențializează lumea românească[71]. Sunt convins că ideea unor personaje care sunt seniori ziua şi satiri noaptea spune ceva despre România.

Borges scria despre H.G. Wells că nuvelele sale parcă n-ar fi expresia unui singur autor, ci a unei întregi literaturi. Ne gândim la acele texte de proză atât de diferite scrise de Wells, la acea exercitare atât de neaşteptată şi de unică a imaginarului. Fiecare dintre acele istorii răspunde unei temeri, unei probleme cât se poate de importante: Cum va fi viitorul? Ce se va întâmpla cu noi, ca specie? Nu am mers oare prea departe cu exagerările noastre? Ne dăm seama ce admirăm într-o astfel de literatură: confirmarea

---

[71] Această afirmație nu este o exagerare. Vezi, de exemplu, Matei Călinescu, *Mateiu I. Caragiale: recitiri*, Editura Polirom, Iaşi, 2007.

a ceea ce Milan Kundera numea, într-un text publicat în octombrie 2006 de *The New Yorker*, „etica esențialului”. În fond, cum să nu ne intereseze un text literar care să-şi dorească să surprindă în mod concis nucleul unei realități, exprimat prin maximum de viziune şi de imaginație?

Cred că literatura ar trebui să fie un spațiu prin nimic diferit de cercetarea matematică, de unde pot fi împrumutate cu succes unele analogii. În cercetarea matematică interesează soluția completă a unei probleme apărute în mod natural, o problemă căreia poți să-i explici legitimitatea şi consistența. Pentru astfel de soluții ai nevoie de instrumente, de tehnici de lucru, de imaginație şi de o doză de încăpățânare. Nu poți să faci cercetare pe o singură idee toată viața. Onest e să apreciezi de ce e important să discuți o anumită problemă, să te bați pentru fiecare nou pas, pentru fiecare nou nivel de înțelegere şi de coerență, pentru o mai mare adâncime între locul de unde ai plecat şi cel unde ai adus lucrurile. Trebuie să înțelegi în fiecare stadiu al unui proiect valoarea calitativă a locului unde te afli şi ce dificultate trebuie înlăturată până la a obține o soluție completă. Nu cred că experiența literară a celui care povesteşte ar fi altfel.

Mi-aş îngădui să invoc aici unul dintre textele mele de proză scurtă, cel pe care-l consider textul în care această încercare de sintetizare mi-a izbutit cel mai bine. Ideea mi-a venit în februarie 1999, în timp ce audiam un curs de geometrie diferențială[72]. Tema cursului din acea zi nu avea nici o legătură cu tema literară a textului pe care aveam să-l scriu câteva ore mai târziu şi unde îmi propuneam să surprind Bucureştiul, un oraş întreg sintetizat printr-o poveste care să-l cuprindă într-o singură metaforă. Eram în una dintre sălile de curs din Wells Hall, de la Michigan State University, la unul dintre acele cursuri avansate în care profesorul nu era audiat decât de patru sau cinci studenți. Deodată, în timp ce urmăream o demonstrație, am avut viziunea unei uriaşe tobe vibrând, pe care era aşezat la prima oră a dimineții oraşul în care trăiesc mulți dintre prietenii mei, cu toată arhitectura lui extravagantă, cu fragmente de clădiri rămase din epoci de mult dispărute. Şi am scris, într-o singură sesiune de lucru care a durat şase ore, o nuvelă pe care o consideram pe atunci ca fiind textul ce surprinde cel mai bine vocea mea literară. Câțiva ani mai târziu, am folosit acel punct de vedere narativ atunci când am scris romanul *Venea din*

[72] E vorba de cursul de geometrie riemanniană, predat de profesorul Bang-Yen Chen în anul universitar 1998-1999.

timpul diez. Actul literar devenise pentru mine o bătălie pentru a sintetiza şi a exprima esenţialul, aşa cum în matematică te străduieşti în demonstraţia unei teoreme de clasificare să obţii completarea tuturor cazurilor. Îmi aleg personajele în aşa fel încât ele să surprindă, prin simpla lor construcţie literară, cheia unei lumi. Cine ar fi putut fi martorul potrivit prin ochii căruia să se vadă România anilor nouăzeci, România tranziţiei, a schimbării dintr-o lume într-alta? Imaginea care m-a urmărit atâţia ani a fost aceea a unui bătrân straniu, pe jumătate vagabond, pe jumătate savant, care audiase cursurile noastre de matematică la Universitatea Bucureşti, la începutul anilor nouăzeci. Cândva, în urmă cu nişte ani, stătusem lângă el într-o sală de curs de la celălalt capăt al lumii şi audiaserăm împreună un curs în care se prezentau o teoremă şi o demonstraţie similare. Plecând de la imaginea lui, trecerea anilor mi-a îngăduit să văd apariţia unui personaj literar. Iată construcţia pe care am propus-o atunci când am scris despre

> „bătrânul al cărui al doilea nume era Sfântul Petru, pe care l-am văzut întâia dată la Piaţa Romană, în vara lui 1988, purtând un sacou jerpelit, cu buzunarele lărgite, rupte şi doldora de cărţi, cărând în mizere pungi de un leu tot felul

de terfeloage desfoliate, tratate mirabile, manuale sau ediții apocrife ale *Filocaliei*.

Imaginează-ți cel mai paşnic personaj din lume, un bătrân hrănindu-se numai cu pâine goală (o începea de dimineață, la prima oră, şi către seară ajungea cu molfăitul cam la trei sferturi, şi asta îi era tot), petrecându-şi tot timpul fie la cursurile tehnice de la Arhitectură sau Politehnică, fie la Măgurele, la Fizică, fie alteori la Matematică. Locuia undeva la intersecția străzii Polonă cu Mihai Eminescu, într-un cotlon mai de nimeni ştiut, unde inițiații spuneau că s-ar afla, în condiții de subterană amintind de adăposturile antiaeriene din vremea războiului, cea mai mare bibliotecă din Bucureşti, net superioară ca număr de volume Bibliotecii Academiei, care ar fi – după statistica Bibliotecii Congresului – a noua în lume. Imaginase un sistem propriu de fişare, clasificare, ordonare şi căutare a volumelor, aşa încât nu era niciodată pierdut în infernala lui bază de date. Era un spațiu aparte subsolul acela, cu ample ramificații către canalizare, iar fiecare cotlon era umplut cu dosare, volume fără coperți, fotocopii, ediții uitate, toate semnate de mulți, foarte mulți autori obscuri de care nimeni nu auzise vreodată, ca şi cum biblioteca lui s-ar fi format ca o alternativă plauzibilă la întregul univers. Spațiul acela era laborator şi sală de lectură (tu l-ai fi găsit prea puțin confortabil, dar pentru el nu conta), lăcaş de meditație şi

sală de rugăciune cu pereții acoperiți, acolo unde nu erau rafturi, de icoane”[73].

Lăsând deoparte nuanțele ironice pe care o asemenea descriere le implică, pasajul acesta e pentru mine important pentru că, cel puțin atât cât am văzut eu, în cultura română cele mai valoroase contribuții le-au produs marginalii. Numărul celor descoperiți sau înțeleşi deplin foarte târziu sau numai după moartea lor e atât de mare, încât nu se poate să nu te pună pe gânduri.

M-a interesat să scriu despre Bucureşti, să surprind esențialul despre acest spațiu geografic şi pentru că nu vreau să evit să răspund provocării. Nu cred în existența unor criterii aparte pentru literatura exilului. Nu mai cred în experiențele „dramatice” ale exilului de azi, nu în sensul acelui discurs lacrimogen, siropos, patetic pe care-l mai auzim uneori. Cei care au plecat din Europa de Est după 1990 nu au suferit aşa cum au suferit cei care au fost nevoiți să-şi părăsească țara înainte de căderea Cortinei de Fier. Nu sunt un prizonier al destinului meu: pot călători şi pot locui acolo unde doresc. Sunt responsabil pentru ceea ce aleg şi gesturile mele nu sunt forțate de o

[73] Fragment din nuvela „Să auzi forma unei tobe”, din volumul *Imperiul generalilor târzii şi alte istorii*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 2002.

situație politică ireconciliabilă, aşa cum s-a întâmplat în cazul altor scriitori înainte de 1989. Trăiesc un destin pe care mi l-am ales, aşa cum aleg cărțile pe care le citesc, şi mă străduiesc să citesc numai din plăcere. Totuşi, e adevărat că patria lăuntrică ne rămâne pentru totdeauna cea în care am deschis ochii, cea din copilărie, universul acela iluzoriu şi levitant cu care ni se întâmplă să comparăm totdeauna ceea ce trăim. Or, eu ştiu foarte bine că acel spațiu nu mai există. Ne amintim însă acel sentiment de plenitudine şi de lipsă de griji pe care îl aveam numai la vârsta de şapte sau de opt ani. Acel sentiment ne deschide porțile către surprinderea codului secret al unui spațiu geografic, al unei lumi. Vedem şi ne imaginăm cu ochii cu care vedeam altădată, fără să ştim că ni se întâmplă asta, spațiul ideal, dintre toate vârstele cea mai fericită.

Începând cu jumătatea anilor şaptezeci, am făcut multe călătorii prin toate colțurile României. Până pe la finele anilor optzeci am fost aproape peste tot. Sunt oraşe pe care le cunosc în detaliu şi pe care mi le amintesc aşa cum erau înainte de transformările din anii optzeci, când multe centre istorice ale oraşelor au fost distruse într-un efort arhitectonic care năzuia să demonstreze superioritatea socialismului. Erau transformări care au alterat – din

păcate – identitatea istorică a unor locuri. Păstrez genul acela de amintiri pe care, de obicei, cei din generația noastră nu le mai au. Fără intenția de a exagera în vreun fel, îndrăznesc să spun că ştiu foarte bine România. În toamna lui 1985, am urmărit cu amărăciune cum centrul vechi al Târgovişte a fost dărâmat, casă după casă. Într-o seară m-am uitat ceasuri în şir cum cad zidurile. Erau ziduri groase, de cărămidă, în care mortarul se transformase în nisip şi din care igrasia risipea în aer un miros rânced. Astfel de scene trec în tine, se depun în straturi succesive şi distincte ale memoriei şi ajung să te urmărească, să-ți răsară în minte atunci când tu locuieşti de mult într-o altă lume şi te ocupi cu alte lucruri. Te urmăresc chiar şi atunci când ai vrea să fii altceva. Şi adevărul e că nu poți fi altceva atâta vreme cât porți cu tine această memorie care e premisa şi substanța felului în care tu înțelegi lumea.

Pe de altă parte, eşti conştient, ca scriitor, că literatură de ficțiune în registrul realist despre o anumită realitate concretă se poate scrie numai dacă trăieşti acolo, numai dacă eşti imersat bine în realitatea aceea. CzesŁ,aw MiŁ,osz a spus asta. Inevitabil, mai devreme sau mai târziu, dacă nu trăieşti într-un loc, evoluțiile contemporane îți depăşesc percepțiile. Ajungi depăşit,

demodat, dacă persişti în teme şi direcţii pentru care interesul se stinge. Poveştile cele mai frumoase pe care ni le imaginăm expiră, chiar dacă nu ne face plăcere să admitem asta. Au loc evoluții pe care nimeni nu le-ar putea anticipa şi care trebuie trăite pentru a fi înțelese.

Literatura poate să-şi propună să cerceteze şi să înțeleagă, să exploreze posibilitățile realității, să continue această realitate, să o prelungească, extinzându-i rezervele de imaginar în direcțiile sugerate de necesitatea sintezei cu semnificație. Nu e vorba de pamflet, nici de literatură propagandistică, ci de altceva, care nu serveşte vreunei cauze din această lume. Etica unei astfel de literaturi nu admite materializare, adică, mai precis spus, nu admite un echivalent în spațiul practic, al politicului. Nu admite *aplicații.* Dimpotrivă, are multiple posibilități de confruntare cu spațiul politicului, deşi literatura poate foarte bine să se inspire şi să preia personajele din mediile acestei lumi. Nu e vorba în nici un caz despre o simplă imitare a realității, ci de căutarea consecințelor ultime ale unor fapte cu rădăcini reale.

Pentru a nu discuta în abstract şi a menționa aici două exemple, voi reaminti tema romanului *Primul secol după Béatrice* de Amin Maalouf. Acolo, autorul explorează până la capăt ipoteza că ingineria genetică ar putea influența

distribuția naşterilor şi ce s-ar întâmpla dacă părinții ar prefera naşterea unor băieți în locul naşterii unor fete. E o problemă literară care pleacă de la o îngrijorare reală, un text în care literatura îşi asumă un rol de cercetare, de explorare. Apoi, într-unul dintre romanele sale, Mario Vargas Llosa îşi propune să exploreze una dintre temerile imaginarului colectiv, dezvoltând iluzia într-un ritm halucinant: cum ar fi dacă armata boliviană ar invada Peru? Şi de ce oare astfel de lucrări ar fi mai interesante decât, să zicem, memoriile sau jurnalele, decât literatura documentară în general? De ce ar fi ficțiunea mai interesantă decât lucrările *non-fiction*? Se poate întâmpla ca literatura de ficțiune să reuşească să identifice o temă substanțială care să devină vizibilă numai atunci când e ilustrată într-un roman sau într-o proză scurtă, deşi acele fapte nu s-au întâmplat întocmai vreodată. Se poate ca o astfel de lucrare de ficțiune să surprindă esența într-un fel în care simpla transcriere a biografiei noastre să nu reuşească să o facă. În România, în perioada de după 1990, pentru ani buni informația de natură documentară a interesat cel mai mult. După ce informația de natură istorică din jurnale şi memorii a fost asimilată, o parte importantă a publicului şi-a întors atenția către ficțiune.

Astfel, sfidarea rămâne mai departe aceeaşi: punctul de plecare este realitatea, dar ştim foarte bine că ceea ce ne interesează se află dincolo de ea, în acel spațiu al ideilor generale, al principiilor, acolo unde enunțul descoperirilor noastre s-ar putea sintetiza, uneori, în formule concentrate care îşi propun să atingă, pentru o scurtă clipă, luciditatea.

CUPRINS

Prolog

Versiunea întregită a realității

Cărți privite dinlăuntru

Istoria unei viziuni medievale (o poveste de la 1350)

O provocare pentru vremurile noastre: predarea geometriei

Citindu-i pe Huygens, Newton şi Euler

Istoria lui Meusnier

Sophie Germain

Despre curbură (partea întâi)

Gheorghe Țițeica

Povestea lui Sebastian Kaufmann şi a Gazetei matematice de acum un veac

De la Programul de la Erlangen, al lui Felix Klein, la poemele lui Ion Barbu din Joc secund

Între laborioasa barbarie şi umanismul cel nou: istoria şi semnificația spațiilor Barbilian

Un exemplu de teorie al cărei timp se stinge

O prezență: Laurențiu Panaitopol

Povestind matematica în vremuri schimbătoare

Nu e vorba doar de forma universului, ci şi de logica lui

Despre curbură (partea a doua)
Cum să trăieşti matematica: mic îndreptar
Diamantul din moştenirea de familie
Codul secret – note pentru o mărturisire literară –